Оценка одной теоретико-числовой суммы

Осипов Н. Н.
Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, Красноярск; nnosipov@rambler.ru

Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — положительные числа, для которых

$$s := \min\{s_1, \ldots, s_n\} > 1.$$

Рассматривается сумма вида

$$S(h, \mathrm{M}, s_1, \ldots, s_n) := \sum_{0 \neq x \in \mathrm{M}} \frac{1}{(1 + |h^{-1}x_1|^{s_1}) \ldots (1 + |h^{-1}x_n|^{s_n})}, \qquad (*)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, M — n-мерная решётка в $\mathbb{R}^n$ и h — малый параметр. Пусть ν — число индексов j, для которых $s_j = s$. Справедлива следующая

Теорема. *Если решётка* M *изображает в* $\mathbb{R}^n$ *кольцо целых чисел* $\mathfrak{D}$ *некоторого вполне вещественного поля алгебраических чисел* $\mathfrak{K}$ *степени* n, *то*

$$S(h, \mathrm{M}, s_1, \ldots, s_n) \asymp h^{ns} (\ln h^{-1})^{\nu - 1}, \quad h \to 0.$$

При $\nu = n$ (т. е. когда $s_1 = \ldots = s_n = s$) эта оценка допускает уточнение [1]:

$$S(h, \mathrm{M}, s) = \frac{2n^{n-1}}{(n-1)!R} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{Q(c)}{c^s}\, h^{ns} \big[(\ln h^{-1})^{n-1} + O((\ln h^{-1})^{n-2})\big],$$

где R — регулятор $\mathfrak{D}$, а $Q(c)$ обозначает число попарно неассоциированных решений $\mu \in \mathfrak{D}$ норменного уравнения $|N_{\mathfrak{K}}(\mu)| = c$.

Доказательство теоремы можно получить, следуя схеме оценки подобных теоретико-числовых сумм, предложенной автором в работе [2]. В докладе предполагается остановится на наиболее нетривиальных моментах реализации этой схемы в случае суммы $(*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов Н.Н.* Асимптотика нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул на пространствах $\widetilde{W}_2^{(s,p,q)}(\Lambda)$ // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Специальный выпуск: Избранные доклады VII международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения». Красноярск, август 2003 г. С. 95 — 101.

2. *Осипов Н.Н.* Схема оценки некоторых теоретико-числовых сумм // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. Специальный выпуск: Избранные доклады VIII международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения» (Улан-Удэ, август 2005 г.). С. 81 — 89.