Алгоритм численного решения одномерных прямых задач распространения SH волн в пористых средах

Холмуродов А.Э.
Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;

1. Постановка прямой задачи

Одномерное уравнение распространения сейсмических волн в пористой среде с учетом поглощения энергии, обусловленного коэффициентом межкомпонентного трения $\chi(z)$, имеет вид [1, 2]

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t) \tag{1}$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \tag{2}$$

где U и V - компоненты вектора смещения частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно, $\mu(z)$ - коэффициент Ламе.

Пусть пористая среда занимает полупространство $z > 0$, т.е. система уравнений (1), (2) справедлива при $z > 0$. Предположим, что среда покоится при $t \le 0$:

$$U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила с импульсом:

$$\mu U_z|_{z=0} = F(t), \tag{5}$$

где

$$F(t) = \delta(t) + f(0)\,\varepsilon(t) + \ldots,$$

$\delta(t)-$ дельта функция Дирака, $\varepsilon(t)-$ функция Хевисайда. Требуется по этой информации и заданным дважды непрерывно дифференцируемым функциям $\rho_s(z)$, $\mu(z)$ определить волновые поля $U = U(z,t)\,, V = V(z,t)$ из (1)-(4). Такую задачу будем называть прямой динамической задачей распространения сейсмических волн в пористой среде.

2. Вычислительный алгоритм решения прямой задачи

Проведем преобразования сначала для уравнения (1). Будем использовать систему координат времени пробега (x,t) с новой переменной $x(z) = \int\limits_0^z \frac{1}{c(z)}ds$, (6) где $c(z) = \sqrt{\mu(z)/\rho_s(z)}$ - скорость волны. В системе координат (x,t) волновое уравнение преобразуется к виду

$$U_{t\,t} = \frac{[\sigma\,(x)\,U_x]_x}{\sigma\,(x)} - \tilde{q}\,(\,x\,)\,(\,U_t - V_t) \tag{7}$$

где $\tilde{q}\,(x) = \chi\,(\,x\,)\frac{\rho_l^2\,(x)}{\rho_s\,(\,x\,)}$ -известная функция,$\sigma(x) = \rho_s(x)c(x) = \sqrt{\mu(x)\rho_s(x)} = \frac{\mu(x)}{c(x)}$ полное сопротивление среды.

Так как уравнение (7) не меняется при умножении $\sigma(x)$ на константу, нормируем $\sigma(x)$ так, чтобы $\sigma(0) = 1$. Заметим, что при введенной таким образом функции $\sigma(x)$ вычисление коэффициента Ламе $\mu(x)$ становится эквивалентным вычислению $\sigma(x)$.

Положим $w = U_t$, $p = -\sigma(x)U_x$ и $r = V_t$. С новыми независимыми переменными волновое уравнение второго порядка (8) становится гиперболической системой уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_t + A\,(x) \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_x = - \begin{bmatrix} 0 \\ q(x)\,(w-r) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma(x) \\ \sigma^{-1}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Граничные условия преобразуются к виду

$$p\,(0,\, t)\; = -\sigma\,(0)\, U_x(0,\, t) = f\,(t). \tag{9}$$

Система (8) является строго гиперболической [3]. Она имеет два семейства характеристик, которые являются прямыми линиями с наклонами $+1$ и -1, характеристическими корнями матрицы $A(x)$. Определяя

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma(x) \\ 1 & -\sigma(x) \end{bmatrix}$$

имеем

$$T\,(x)\,A\,(x)\,T^{-1}(x) = \Lambda.$$

Умножая систему (8) слева на $T(x)$ и полагая, что $\sigma(x)$ дифференцируемая функция, получаем каноническую форму системы (8):

$$(T\nu)_t + \Lambda\,(T\nu)_x = \Lambda T_x \nu - T \begin{bmatrix} 0 \\ q\,(x)\,(w-r) \end{bmatrix}$$

где $v = (\,p \quad w\,)^T$. В покомпонентной записи система выглядит так

$$(p+\sigma\, w)_x +\; (p+\sigma\, w)_t = \sigma'\, w - \sigma\,(x)\, q\,(x)\,(w-r) \tag{10}$$

$$(p-\sigma\, w)_x -\; (p-\sigma\, w)_t = -\sigma'\, w - \sigma\,(x)\, q\,(x)\,(w-r) \tag{11}$$

где $\sigma'\,(x)$ производная $\sigma\,(x)$. Уравнения (10), (11) можно также записать в интегральной форме. Для произвольной фиксированной точки $(x,\, t)$ из области $t > x$ и любого $\tilde{x} < x$ можно проинтегрировать уравнение (10) вдоль характеристики $dt/dx = 1$ от $(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})$ до $(x,\, t)$. При этом считаем, что $h = x - \tilde{x} > 0$ достаточно мало. В полученном соотношении $\sigma'\,(s)$ под интегралом заменим на $\frac{\sigma\,(x) - \sigma\,(\tilde{x})}{h}$ и применяя формулу трапеций получим следующее соотношение:

$$p\,(x,\, t) + \sigma(x)\, w\,(x,t) - [p\,(\tilde{x}, t-x+\tilde{x}) +\; \sigma(\tilde{x})\;\, w\,(\tilde{x}, t-x+\tilde{x})] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\sigma\,(x) - \sigma\,(\tilde{x})]\;[w(x,t) + w\,(\tilde{x}, t-x+\tilde{x})] -$$

$$-\frac{h}{2}\left[\sigma\left(x\right)q\left(x\right)\left(w(x,t)-r(x,t)\right)+\sigma\left(\tilde{x}\right)q\left(\tilde{x}\right)\left(w\left(\tilde{x},t-x+\tilde{x}\right)-r\left(\tilde{x},t-x+\tilde{x}\right)\right)\right], \quad (12)$$

Проинтегрировав уравнение (11) вдоль характеристики $dt/dx=-1$ от $(\tilde{x},t+x-\tilde{x})$ до (x,t) и поступая аналогично, получаем второе соотношение:

$$p\left(x,\,t\right)-\sigma(x)\,w\left(x,t\right)-\left[p\left(\tilde{x},t+x-\tilde{x}\right)-\sigma(\tilde{x})\;w\left(\tilde{x},t+x-\tilde{x}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sigma\left(x\right)-\sigma\left(\tilde{x}\right)\right]\,\left[w(x,t)+w\left(\tilde{x},t+x-\tilde{x}\right)\right]+$$

$$+\frac{h}{2}\left[\sigma\left(x\right)q\left(x\right)\left(w\left(x,t\right)-r(x,t)\right)+\sigma\left(\tilde{x}\right)q\left(\tilde{x}\right)\left(w\left(\tilde{x},t+x-\tilde{x}\right)-r\left(\tilde{x},t+x-\tilde{x}\right)\right)\right], \quad (13)$$

Полученные уравнения (12) и (13) уже подходят для численного моделирования. Спроецируем величины $p, w,\ r$ и σ на сетку, где точки сетки определяются пересечениями характеристических линий. Сеточные функции для σ, q, p, w и r определяются следующими соотношениями: $\sigma_i=\sigma\left[\,(i-1)\,h\right]$, $q_i=q\left[\,(i-1)\,h\right]$, $i=1,2,3,\ \ldots$, где σ нормирована так, что $\sigma_1=1$, $p_{i\,j}=p\left[\,(i-1)\,h,\;(2j-i-1)\,h\right]$, $w_{i\,j}=w\left[\,(i-1)\,h,\;(2j-i-1)\,h\right]$ и $r_{i\,j}=r\left[\,(i-1)\,h,\;(2j-i-1)\,h\right]$, для $i=1,2,3,\ \ldots$, и $j\geq i$.

Из начальных условий получаем, что

$$p_{i\,i}=w_{i\,i}=r_{i\,i}=0 \text{ для } i=1,2,3,\ \ldots, \quad (14)$$

и, из граничных условий, имеем $p_{1j}=f_j=f\left[t=(j-1)h\right]$, $w_{1j}=g'_j=g'\left[t=(j-1)h\right]$. Предположим, что σ_i известны для $i=1,2,...,I$, а p_{ij} и w_{ij} вычислены для всех $i<I$ и $j>i$. Тогда мы можем выразить $p_{I,j}$ и $w_{I,j}$ из следующих соотношений, полученных с помощью проецирования уравнений (12) и (13) на сетку:

$$p_{I,\,j}+\sigma_I w_{I,j}=p_{I-1,\,j-1}+\sigma_{I-1}w_{I-1,j-1}+\frac{1}{2}\,\left[\sigma_I-\sigma_{I-1}\right]\,\left[w_{I,j}+w_{I-1,j-1}\right]-$$

$$-\frac{h}{2}\left[\sigma_I\,q_I\left(\,w_{I,j}-r_{I,j}\right)+\sigma_{I-1}\,q_{I-1}\left(\,w_{I-1,j-1}-r_{I-1,j-1}\right)\right] \quad (15)$$

$$p_{I,\,j}-\sigma_I w_{I,j}=p_{I-1,\,j}-\sigma_{I-1}w_{I-1,j}-\frac{1}{2}\,\left[\sigma_I-\sigma_{I-1}\right]\,\left[w_{I,j}+w_{I-1,j}\right]-$$

$$-\frac{h}{2}\left[\sigma_I\,q_I\left(\,w_{I,j}-r_{I,j}\right)+\sigma_{I-1}\,q_{I-1}\left(\,w_{I-1,j}-r_{I-1,j-1}\right)\right] \quad (16)$$

для $j=I+1,I+2,....$ Разрешим эти уравнения относительно $p_{I,j}$ и $w_{I,j}$. Так как $\sigma(x)>0$, то $\sigma_{I-1}+\sigma_I>0$. Получим:

$$p_{I,\,j}=\frac{1}{2}\left(\,p_{I-1,\,j-1}+p_{I-1,\,j}\right)+\frac{1}{4}\left(\,\sigma_{I-1}+\sigma_I\right)\left(w_{I-1,j-1}-w_{I-1,j}\right)-$$

$$-\frac{h}{2}\sigma_I\,q_I\left(\,w_{I,j}-r_{I,j}\right)-\frac{h}{4}\,\sigma_{I-1}\,q_{I-1}\,\left[\left(\,w_{I-1,j-1}-r_{I-1,j-1}\right)+\left(\,w_{I-1,j}-r_{I-1,j}\right)\right] \quad (17)$$

$$w_{I,\,j}=\frac{\left(\,p_{I-1,\,j-1}-p_{I-1,\,j}\right)}{\sigma_{I-1}+\sigma_I}+\frac{1}{2}\left(w_{I-1,j-1}+w_{I-1,j}\,\right)-$$

$$-\frac{h}{2}\,\frac{\sigma_{I-1}\,q_{I-1}\,\left[\left(\,w_{I-1,j-1}-r_{I-1,j-1}\right)-\left(\,w_{I-1,j}-r_{I-1,j}\right)\right]}{\sigma_{I-1}+\sigma_I} \quad (18)$$

В частности вычислены $p_{I,I+1}$ и $w_{I,I+1}$. Вернемся теперь к уравнению (2). Поделив его правую и левую части на $\rho_l(z)$, заметим, что его можно проинтегрировать по времени t. Учитывая начальные условия (3) и (4), получим:

$$V_t = \chi\,(x)\rho_l\,(x)\,(U - V). \tag{19}$$

Проецируя это уравнение на ту же сетку и приближая первую производную по времени V_t первой разностью $V_t\,(\,t, x\,) \approx \frac{V\,(t+2h,x)-V(t,x)}{2h}$,, получим:

$$\begin{aligned} r_{i\,j} &= (\chi\,\rho_l)_i\,(\,U_{i\,j} - V_{i\,j}), \\ r_{i\,j+1} &= (\chi\,\rho_l)_i\,(\,U_{i\,j+1} - V_{i\,j+1}) \end{aligned} \tag{20}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$r_{i\,j+1} - r_{i\,j} = (\chi\,\rho_l)_i\,(\,(\,U_{i\,j+1} - U_{i\,j}) - (V_{i\,j+1} - V_{i\,j})\,).$$

Теперь, аналогично приближая U_t с помощью первой разности $w_{i\,j} = (U_t)_{i\,j} = \frac{U_{i\,j+1}-U_{i\,j}}{2h}$, имеем:

$$r_{i\,j+1} = r_{i\,j} + 2h\,(\chi\,\rho_l)_i\,(w_{i\,j} - r_{i\,j}\,) \tag{21}$$

Подставляя $i+1$ вместо I в уравнение (16) и i вместо I в уравнение (15), разрешая полученные соотношения относительно p_{ij} и w_{ij}, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} w_{i\,j} = \frac{1}{\Delta}\,\{\,2\,(p_{i-1,\,j-1} - p_{i-1,\,j}) + \,(\,\sigma_i + \sigma_{i-1})\,w_{i-1,j-1} + \,(\,\sigma_{i+1} + \sigma_i)\,w_{i+1,j}\} - \\ -\frac{1}{\Delta}\,\{\,h\,\left[\sigma_{i+1}q_{i+1}(\,w_{i+1,j} - r_{i+1,j}) - 2\,\sigma_i q_i r_{i\,j} + \sigma_{i-1}q_{i-1}\,(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1}\,)\right]\} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} p_{i\,j} = p_{i-1,\,j-1} - \frac{1}{2}\,\left[\sigma_i + \sigma_{i-1}\right]w_{i,j} + \frac{1}{2}\,\left[\sigma_i + \sigma_{i-1}\right]w_{i-1,j-1} - \\ -\frac{h}{2}\,\left[\sigma_i q_i(\,w_{i,j} - r_{i,j}) + \sigma_{i-1}q_{i-1}\,(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1}\,)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

где $\Delta = \sigma_{i+1} + 2\sigma_i + \sigma_{i-1} + 2h\sigma_i q_i$. Подставляя в (17) и (18) $I = 2$ и исключая оттуда $p_{1,\,j-1}$, $w_{1,\,j-1}$ и $r_{1,\,j-1}$, а также учитывая, что $\sigma_1 = 1$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} w_{1,\,j} = w_{2,\,j}\frac{1 + \sigma_2 - h\,\sigma_2 q_2}{1 + \sigma_2 + h\,q_1} + \quad , \\ + \frac{2\,(\,p_{1,\,j} - p_{2,\,j}) + h\,q_1\,r_{1,\,j} + h\,\sigma_2\,q_2\,r_{2\,j}}{1 + \sigma_2 + h\,q_1} \end{aligned} \tag{24}$$

с помощью которого, вместе с соотношением (20), получаем схему решения прямой задачи (1)-(5).

По определению полагаем $p_{0,j} = w_{0,j} = r_{0,j} = 0$. Из формулы (18) находим $w_{1,2} = 0$, а из формул (14) и (21) следует, что $r_{1,2} = 0$. Аналогично вычисляются $w_{1,j} = 0$ и $r_{1,j} = 0$ при $j = 3, 4, ...$ Далее вычисляются значения сеточных функций $p_{i,j}$, $w_{i,j}, r_{i,j}$ при $i = 2, 3, 4, ...$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И.* Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993, №1. с. 100-111.

2. *Imomnazarov Kh.Kh.* Combined One Dimensional Inverse Problems for Maxwell's equations and an Equations of the Continual Filtration Theory // Appl. Math. Lett, 1999, v. 12, №2, pp. 45-49.

3. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.:Наука, 1979.