Чувствительность диффузионного процесса к параметрам движения границы [1]

Gusev S. A.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск; sag@osmf.sscc.ru

В работе рассматривается диффузионный процесса в 2D ограниченной области с подвижной поглощающей границей. Задается функционал этого процесса, математическое которого совпадает с решением параболической краевой задачи в заданной точке внутри области. Движение границы области определяется некоторым набором параметров, которые мы называем параметрами движения границы.

Основное внимание уделяется построению метода оценки решения данной краевой задачи и его производных по параметрам движения границы с использованием численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Предлагаемый метод решения этой задачи основан на аппроксимации подвижной границы ломаной линией и построении взаимно однозначного отображения области с подвижной границей на область, граница которой неподвижна. При этом взаимно однозначное отображение задается с помощью преобразования переменных, которое приводит к изменению коэффициентов диффузии и сноса так, что эти коэффициенты становятся зависимыми от параметров. В результате получается случайный процесс, движение которого происходит в области с неподвижной границей, но при этом траектория процесса внутри области зависит от параметров, определяющих положение подвижной границы.

Обозначим $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство и $\{\mathcal{F}_t\}$ – неубывающую последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Пусть $W_{\cdot}$ — двумерный винеровский процесс и предположим, что для любого t случайная величина W_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, и для $s > t$ разность $W_s - W_t$ независима от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Пусть $G(t) \subset R^2$ зависимая от t область, ограниченная при любом $t \in [0, T]$. Обозначим Γ границу области. Будем предполагать, что движение Γ однозначно определяется некоторым набором параметров $\theta = (\theta_{\mathbf{1}}, \ldots, \theta_{\mathbf{n_p}})$, и при этом координаты точек $\Gamma(t, \theta)$ являются дифференцируемыми функциями t и $\theta_{\mathbf{i}}$, $i = 1, \ldots, n_p$.

Пусть точка $(x, y) \in G(t)$ при некотором значении $t \in [0, T)$ и некотором заданном наборе параметров θ. Зададим диффузионный процесс $(x_s, y_s) \in G(s) \subset R^2$ при $s \in [t, T]$, определяемый системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$\begin{aligned} x_s &= x + \int\limits_t^s a_{1v} dv + \int\limits_t^s \sum_{i=1}^{2} \sigma_{1iv} dW_{iv} \ , \\ y_s &= y + \int\limits_t^s a_{2v} dv + \int\limits_t^s \sum_{i=1}^{2} \sigma_{2iv} dW_{iv} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

у которого коэффициенты сноса и диффузии a_i, σ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ зависят от v, x_v, y_v.

В данной работе, для некоторой достаточно гладкой функции φ, мы рассматриваем получение оценки представленного ниже математического ожидания функционала процесса, определяемого системой СДУ (1), на основе статистического мо-

[1] Работа поддержана грантом РФФИ, N 11-01-00252-a.

делирования траекторий

$$u(t,x,y,\theta) = E_{t,x,y}\big[\varphi(x_T,y_T,\theta)\chi_{\tau>T}\big]. \qquad (2)$$

В (2) приняты следующие обозначения: $\tau = \inf\{v|\ \ v > t,\ \ (x_v,y_v) \in \Gamma\}$ — момент первого достижения границы; χ_A – индикаторная функция множества A; $E_{t,x,y}$ — знак условного математического ожидания при условии, что в момент t процесс $(x.,y.)$ находился в точке (x,y).

Известно (см., например, [1]), что математическое ожидание функционала в (2) совпадает со значением в точке (t,x,y) решения краевой задачи

$$\partial u/\partial t + Lu = 0\ , \qquad (3)$$

$$u(T,x,y) = \varphi(x,y,\theta), \qquad (4)$$

$$u(t,x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma(t,\theta), \qquad (5)$$

где $L \equiv \frac{1}{2}\left(b_{11}(t,x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b_{12}(t,x,y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + b_{22}(t,x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + a_1(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y}$; $B = (b_{ij}) = \sigma\sigma^*$. Предполагается, что матрица B положительно определена. Будем предполагать также, что существует единственное решение задачи (3) – (5); функция φ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Кроме того, для определения производных функционала (2) требуется существование производных решения задачи (3) – (5) по x, y, θ на Γ.

Для построения взаимно однозначного отображения области с подвижной границей на неподвижную область в окрестности подвижной границы задается треугольная сетка такая, что часть сторон треугольников образует ломаную линию, которая является аппроксимацией подвижной части границы. При этом вершины треугольников этой сетки, находящиеся на границе, движутся и тем самым определяют движение границы. Построенную таким образом область будем обозначать G_m. Обозначим G_c область с неподвижной границей, и она полностью идентична G_m в начальный момент времени. В G_c тоже задается треугольная сетка, которая полностью совпадает с начальным положением треугольной сетки в G_m.

Взаимно однозначное соответствие между треугольниками в G_c и треугольниками в G_m устанавливается следующим образом. Рассмотрим два треугольника: T в G_m с координатами вершин (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) и $\bar{T}$ в G_c с координатами вершин $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)$, $(\bar{x}_3,\bar{y}_3)$.

Построим в пространстве $\mathbb{R}^3$ плоскость, проходящую через три точки $X_1 = (\bar{x}_1,\bar{y}_1,x_1)$, $X_2 = (\bar{x}_2,\bar{y}_2,x_2)$, $X_3 = (\bar{x}_3,\bar{y}_3,x_3)$. Пусть уравнение плоскости записывается в виде

$$A_x\bar{x} + B_x\bar{y} + C_x x + D_x = 0\ . \qquad (6)$$

Тогда коэффициенты этой плоскости можно выразить через координаты точек $X_1 = (\bar{x}_1,\bar{y}_1,x_1)$, $X_2 = (\bar{x}_2,\bar{y}_2,x_2)$, $X_3 = (\bar{x}_3,\bar{y}_3,x_3)$

$$A_x = (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(x_3 - x_1) - (\bar{y}_3 - \bar{y}_1)(x_2 - x_1)\ , \qquad (7)$$

$$B_x = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(x_3 - x_1) - (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(x_2 - x_1)\ , \qquad (8)$$

$$C_x = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) - (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\ , \qquad (9)$$

$$D_x = -(A_x\bar{x}_1 + B_x\bar{y}_1 + C_x x_1). \qquad (10)$$

Аналогично определяем плоскость $A_y\bar{x}+B_y\bar{y}+C_y y+D_y = 0$, проходящую через точки $Y_1 = (\bar{x}_1,\bar{y}_1,y_1)$, $Y_2 = (\bar{x}_2,\bar{y}_2,y_2)$, $Y_3 = (\bar{x}_3,\bar{y}_3,y_3)$.

На самом деле $C_x = C_y$, поэтому в дальнейшем этот коэффициент пишем без индексов. Выразим x, y из уравнений плоскостей

$$x = -\frac{1}{C}(A_x(t,\theta)\bar{x} + B_x(t,\theta)\bar{y} + D_x(t,\theta)), \tag{11}$$

$$y = -\frac{1}{C}(A_y(t,\theta)\bar{x} + B_y(t,\theta)\bar{y} + D_y(t,\theta)). \tag{12}$$

Равенства (11, (12) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $(\bar{x},\bar{y})$ неподвижного треугольника $\bar{T}$ в G_c и точками (x,y) треугольника T подвижной сетки в G_m, если

$$A_x B_y - A_y B_x \neq 0. \tag{13}$$

Для указания принадлежности точек и треугольников области G_c в их обозначениях ставим черту сверху.

Из системы уравнений (11), (12) при выполнении условия (13), легко выражаются координаты точки неподвижного треугольника $\bar{T}$ через координаты соответствующей точки треугольника $T \subseteq G_m$.

Пусть k_T – количество треугольников в сетке. Обозначим T_i, $\bar{T}_i$, $i = 1,\ldots,k_T$ треугольники подвижной сетки в G_m и неподвижной сетки в G_c соответственно. Верхние индексы у коэффициентов плоскостей: A_x^i, B_x^i, D_x^i, A_y^i, B_y^i, D_y^i, C^i, $i = 1,\ldots,k_T$ в наших обозначениях соответствуют номерам треугольников.

Обозначим f_x, f_y правые части равенств (11), (12) соответственно. Установим взаимно однозначное отображение $F : G_c \to G_m$ с помощью равенства

$$(x,y) = \begin{cases} (f_x, f_y), & (\bar{x},\bar{y}) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k_T} \bar{T}_i, \\ (\bar{x},\bar{y}), & (\bar{x},\bar{y}) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k_T} \bar{T}_i. \end{cases} \tag{14}$$

Мы используем биекцию (14) G_c на G_m для построения случайного процесса в G_c такого, что с помощью моделирования его траекторий можно получать требуемые оценки $u(t,x,y)$, $u_\theta(t,x)$.

Пусть $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{T}_i$, где $\bar{T}_i$ – некоторый треугольник в G_c. Точке $(\bar{x},\bar{y})$ при отображении (14) соответствует в G_m точка $(x,y) = (f_x(t,\bar{x},\bar{y},\theta), f_y(t,\bar{x},\bar{y},\theta))$.

Определим на треугольниках области G_c функции $\bar{u}$, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_{ij}$, $\bar{\sigma}_{ij}$ равенствами

$$\bar{u}(t,\bar{x},\bar{y},\theta) = u(t, f_x(t,\bar{x},\bar{y},\theta), f_y(t,\bar{x},\bar{y},\theta)), \tag{15}$$

$$\bar{a}_i(t,\bar{x},\bar{y},\theta) = a_i(t, f_x(t,\bar{x},\bar{y},\theta), f_y(t,\bar{x},\bar{y},\theta)), \tag{16}$$

$$\bar{b}_{ij}(t,\bar{x},\bar{y},\theta) = b_{ij}(t, f_x(t,\bar{x},\bar{y},\theta), f_y(t,\bar{x},\bar{y},\theta)). \tag{17}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(t,\bar{x},\bar{y},\theta) = \sigma_{ij}(t, f_x(t,\bar{x},\bar{y},\theta), f_y(t,\bar{x},\bar{y},\theta)). \tag{18}$$

Мы в нашей работе устанавливаем, что диффузионный процесс в треугольниках $\bar{T}_i \in G_c$, получаемый с учетом построенного взаимно однозначного соответствия между G_m и G_c, удовлетворяет векторному уравнению

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^i} \begin{pmatrix} -B_y^i & A_y^i \\ B_x^i & -A_x^i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 - \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ a_2 - \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{pmatrix} \right]. \tag{19}$$

Из (19) на основании равенств (16), (18) приходим к системе СДУ, которая описывает диффузионный процесс в треугольнике $\bar{T}_i \in G_c$

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^i} \begin{pmatrix} -B_y^i & A_y^i \\ B_x^i & -A_x^i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \bar{a}_2 - \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{pmatrix} \right]. \qquad (20)$$

Уравнение (19) позволяет получить преобразование, с помощью которого осуществляется переход от процесса $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ в треугольнике $\bar{T}_i \subseteq G_m$ к диффузионному процессу $(\tilde{x}., \tilde{y}.)$ в G_m, имеющему такие же коэффициенты диффузии и сноса как у процесса (1)

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\tilde{y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{C^i} \begin{pmatrix} A_x^i & B_x^i \\ A_y^i & B_y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(t,\bar{x}^i,\bar{y}^i,\theta)}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y(t,\bar{x}^i,\bar{y}^i,\theta)}{\partial t} \end{pmatrix} dt. \qquad (21)$$

Таким образом, процесс $(\bar{x}^i_., \bar{y}^i_.)$ в любом из треугольников $\bar{T}_i$ индуцирует процесс $(\tilde{x}., \tilde{y}.)$ в G_m, у которого коэффициенты сноса и диффузии совпадают с соответствующими коэффициентами процесса $(x., y.)$ в G_m. Отсюда следует, что на основе моделирования траекторий случайного процесса в области G_c и отображения их в соответствующие траектории в области G_m, можно получать оценки математического ожидания диффузионного процесса $(x., y.)$ (2).

С другой стороны в силу биективности отображения (14) оценку решения краевой задачи (3) – (5) можно находить на основе моделирования траекторий процесса $(\bar{x}., \bar{y}.)$ в области G_m без отображения их в траектории подвижной области, а как оценку математического ожидания функционала диффузионного процесса $(x., y.)$ в области G_c

$$\begin{aligned} u(t,x,y,\theta) = E_{t,\bar{x},\bar{y}} \big[&\varphi(f_x(T,\bar{x}_T,\bar{y}_T), f_y(T,\bar{x}_T,\bar{y}_T),\theta) \chi_{(\tau>T)\&((\bar{x}_T,\bar{y}_T)\in\cup\bar{T}_i)}) \\ &+\varphi(\bar{x}_T,\bar{y}_T),\theta) \chi_{(\tau>T)\&((\bar{x}_T,\bar{y}_T)\notin\cup\bar{T}_i)} \big], \end{aligned} \qquad (22)$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – координаты точки в G_c, соответствующей точке $(x,y) \in G_m$ при взаимно однозначном соответствии (14).

В данной работе получено выражение производной u_θ, с использованием которого можно определять оценки производных по параметрам u_θ

$$\begin{aligned} u_\theta(t,x,y,\theta) = E_{t,\bar{x},\bar{y}} \Big[\Big(&\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_T \left(\tfrac{\partial f_x}{\partial x} (\bar{x}_\theta)_T + \tfrac{\partial f_x}{\partial y} (\bar{y}_\theta)_T + \tfrac{\partial f_x}{\partial \theta} \right) \\ &+ \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_T \left(\tfrac{\partial f_y}{\partial x} (\bar{x}_\theta)_T + \tfrac{\partial f_y}{\partial y} (\bar{y}_\theta)_T + \tfrac{\partial f_y}{\partial \theta} \right) \Big) \chi_{(\tau>T)\&\left((\bar{x}_T,\bar{y}_T)\in\cup\bar{T}_i\right)} \\ &+ \left(\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_T (\bar{x}_\theta)_T + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_T (\bar{y}_\theta)_T \right) \chi_{(\tau>T)\&\left((\bar{x}_T,\bar{y}_T)\notin\cup\bar{T}_i\right)} \Big], \end{aligned}$$

где $\bar{x}_\theta$, $\bar{y}_\theta$ – производные $\bar{x}$, $\bar{y}$ по θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.