К проблеме численного решения эллиптических задач

Белых В. Н.
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
belykh@math.nsc.ru

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию. Качество дискретизаций оценивается сравнением её характеристик (точности и объема) с асимптотиками двух числовых параметров $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$, характеризующих аппроксимационные возможности компакта X решений задачи [1]. Точнее, с асимптотиками александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ при $n \to \infty$ и колмогоровской ε-энтропии $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$. Напомним, что поперечник $\alpha_n(X)$ характеризует способность компакта X "хорошо" приближаться компактами топологической размерности $\leq n$, а энтропия $H_\varepsilon(X)$, определяемая двоичным логарифмом от минимального числа элементов в наиболее экономном 2ε-покрытии X, задает минимальный объем информации в битах, требуемый для различения элементов компакта X с точностью $\varepsilon > 0$.

Величины асимптотик $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ определяются гладкостью составляющих компакт X элементов [1-3]. Грань отличающая качественную дискретизацию характеризуется наследованием дифференциальных свойств решений. Иначе говоря, практическая эффективность численного метода зависит от того, насколько полно конечномерные задачи, получаемые дискретизацией исходной краевой, наследуют дифференциальные свойства решений последней. Именно по этой причине уникальные аппроксимационные возможности компактов решений эллиптических задач (характеризующиеся наличием шаудеровских оценок) находятся в конфликте с той точностью, которую способны обеспечивать численные методы с главным членом погрешности (квадратур, конечных разностей, конечных элементов и т.п.).

В докладе указан принципиально новый – *ненасыщаемый* [1,4] – метод численного решения осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа в случае C^∞-гладких тел вращения достаточно произвольной формы. Специфическая его особенность – отсутствие главного члена погрешности и, как результат – способность автоматически подстраиваться к любым естественным для задач классам корректности. В результате экстраординарные запасы гладкости решений задач (к примеру, бесконечная дифференцируемость) прежде находившиеся на периферии насущных интересов компьютерных вычислений, становятся их активным персонажем [5,6].

В качестве примера с высокой точностью численно решена задача внешнего безотрывного обтекания потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости эллипсоида вращения с удлинением, равным 1000 (см. [7]). Отметим, что эллипсоид вращения, с удлинением, равным 25, становится уже непреодолимым препятствием для методов с главным членом погрешности – *насыщаемых*, т.е. таких, как методы квадратур, конечных разностей, конечных элементов и подобные им.

Полученный результат имеет и принципиальный интерес [1], поскольку в случае C^∞-гладких решений построенный численный метод с точностью до медленно растущего множителя $O(\ln^2 n)$ реализует абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности $O(e^{-n\varrho})$, $\varrho = const$, n – число свободных параметров у функций, из которых конструируется приближение. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой $\alpha_n(X)$ компакта X аналитических функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид $O(e^{-n\varrho})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00147-а) и Междисциплинарного интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. РХД, Москва-Ижевск, 2002. 2. *Белых В.Н.* Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К.И. Бабенко) // ДАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 731-735. 3. *Белых В.Н.* Об абсолютной ε-энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых периодических функций // СМЖ. 2011. Т. 52, № 3 (в печати). 4. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^{∞}-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // СМЖ. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499. 5. *Белых В. Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // ДАН. 2007. Т. 417. № 4. С. 442–445. 6. *Белых В. Н.* Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа // СМЖ. 2011. Т. 52, № 4 (в печати). 7. *Белых В. Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 5. С. 56-67.