Коэффициенты одной оптимальной квадратурной формулы

Ахмедов Д.М.
Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta), \tag{1}$$

где $0<t<1$, $\varphi(x)\in L_2^{(2)}(0,1)$, $L_2^{(2)}(0,1)$ – пронстранство Соболева, C_β – коэффициенты квадратурной формулы (1), $h=\frac{1}{N}$, $N=2,3,4,\dots$.

В работе [1] для оптимальных коэффициентов квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ получена система, которая при $m=2$ имеет вид

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C([\gamma],t)\cdot\frac{|h\beta-h\gamma|^3}{12}+p_1\cdot[\beta]+p_0=f([\beta],t),\qquad \beta=0,1,2,...,N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C([\gamma],t)=g_0,$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C([\gamma],t)\cdot[\gamma]=g_1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(h\beta,t)= \ & \tfrac{1}{12}\int_0^1 \tfrac{|x-h\beta|^3}{x-t}dx=\tfrac{1}{12}\Big(-\tfrac{11}{3}(h\beta)^3+(5t+3)(h\beta)^2- \\ & -(2t^2+3t+1,5)(h\beta)+(t^2+\tfrac{t}{2}+\tfrac{1}{3})+ \\ & +(t-h\beta)^3(-2\ln|h\beta-t|+\ln(t-t^2))\Big)\end{aligned}$$

$$g_0=\int_0^1\frac{dx}{x-t}=\ln\frac{1-t}{t},\qquad g_1=\int_0^1\frac{x}{x-t}dx=1+t\ln\frac{1-t}{t}.$$

$C([\gamma],t)$, $\gamma=\overline{0,N}$ и p_1, p_0 – неизвестные.

Приближенным вычислением сингулярных интегралов занимались многие математики (см., например, [2-6]).

Целью настоящей работы является нахождение оптимальных коэффициентов $C([\gamma],t)$, $\gamma=\overline{0,N}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $t\neq h\beta$, $\beta=\overline{0,N}$. Тогда оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} C[0] \ = \ & \tfrac{6}{h^3}\Big[\tfrac{g_0}{12}\left(h^3-3q^N(h^2+h(q+2))\right)+\tfrac{g_1q^N}{4}(h^2+2h(q+2))+ \\ & +a_1^- h(q+1)+f(0,t)(3q+2)-f(h,t)(12q+5)-q^N(3f(1,t)\times \\ & \times(q+1)+a_1^+h(q+2))+6(q+2)\sum_{\gamma=2}^{N}q^\gamma f(h\gamma,t)\Big],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C[\beta] \;=\; & \tfrac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{\beta-2} q^{\beta-\gamma} f(h\gamma,t) - (12q+5)\Bigg(f(h(\beta-1),t)+\\
& +f(h(\beta+1),t)\Bigg) + (6q+4)f(h\beta,t) + 6(q+2)\sum_{\gamma=\beta+2}^{N} q^{\gamma-\beta} f(h\gamma,t)+\\
& +\tfrac{g_1}{4}\Bigg(q^{N-\beta}(2h(q+2)+h^2) - q^{\beta}h^2\Bigg) + q^{\beta}\Bigg(a_1^- h(q+2) - 3f(0,t)\times\\
& \times(q+1)\Bigg) - q^{N-\beta}(3f(1,t)(q+1) + \tfrac{g_0}{4}(h(q+2)+h^2)+\\
& +a_1^+ h(q+2))\Bigg], \qquad \beta=\overline{1,N-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C[N] \;=\; & \tfrac{6}{h^3}\Bigg[-\tfrac{g_0}{12}(3h(q+1)-h^3) + \tfrac{g_1}{4}(2h(q+1)-q^N h^2) + q^N\Bigg(a_1^- h(q+2)-\\
& -3f(0,t)(q+1)\Bigg) - a_1^+ h(q+1) + f(1,t)(3q+2) - f(1-h,t)\times\\
& \times(12q+5) + 6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-2} q^{N-\gamma} f(h\gamma,t)\Bigg].
\end{aligned}
$$

где

$$
a_1^- = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad a_1^+ = \frac{\Delta_2}{\Delta},
$$

$$
a_0^- = f(0,t), \qquad a_0^+ = f(1,t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta},
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \;=\; & B_2^2 - A_2^2,\\
\Delta_1 \;=\; & A_2\Bigg[-F_1 - \tfrac{1}{12}g_0(B_1+3B_2+3B_3) + \tfrac{1}{4}g_1(B_1+2B_2+B_3-A_3)-\\
& -A_1 f(0,t) - B_1\Bigg(f(1,t) - \tfrac{1}{12}g_0 + \tfrac{1}{4}g_1\Bigg)\Bigg]-\\
& -B_2\Bigg[-F_2 - \tfrac{1}{12}g_0(A_1+3A_2+3A_3) + \tfrac{1}{4}g_1(A_1+2A_2+A_3-B_3)-\\
& -B_1 f(0,t) - A_1\Bigg(f(1,t) - \tfrac{1}{12}g_0 + \tfrac{1}{4}g_1\Bigg)\Bigg],\\
\Delta_2 \;=\; & -A_2\Bigg[-F_2 - \tfrac{1}{12}g_0(A_1+3A_2+3A_3) + \tfrac{1}{4}g_1(A_1+2A_2+A_3-B_3)-\\
& -B_1 f(0,t) - A_1\Bigg(f(1,t) - \tfrac{1}{12}g_0 + \tfrac{1}{4}g_1\Bigg)\Bigg]+\\
& +B_2\Bigg[-F_1 - \tfrac{1}{12}g_0(B_1+3B_2+3B_3) + \tfrac{1}{4}g_1(B_1+2B_2+B_3-A_3)-\\
& -A_1 f(0,t) - B_1\Bigg(f(1,t) - \tfrac{1}{12}g_0 + \tfrac{1}{4}g_1\Bigg)\Bigg],\\
F_1 \;=\; & 6(q+2)\sum_{\gamma=1}^{N} q^{\gamma+1} f(h\gamma,t) - (12q+5)f(0,t),\\
F_2 \;=\; & 6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-1} q^{N+1-\gamma} f(h\gamma,t) - (12q+5)f(1,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 3q+2, & B_1 &= 3q^N(3q+1)\\
A_2 &= h(2q+1), & B_2 &= hq^N(2q+1)\\
A_3 &= h^2 q, & B_3 &= -h^2 q^{N+1},
\end{aligned}
$$

$q = \sqrt{3} - 2.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шадиметов Х.М.* Коэффициенты весовых оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$// Кубатурные формулы и их приложения / Доклады V международного семинара-совещания (Красноярск, 13-18 сентября, 1999) -Красноярск: КГТУ, 1999. -С.207-214.

2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных уравнений и численный экспримент. (в математической физике, теории упругости и дифракции волн).-М.: ТОО "Янус" , 1995. -520с.

3. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. -М.: Наука, 1985. -256 с.

4. *Габдулхаев Б.Г.* Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов I // Известия вузов. Математика. 1975. №4. -С.3-13.

5. *Исраилов М.И., Шадиметов Х.М.* Весовые оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистана -1991, №8, -С.10-11.

6. *Шадиметов Х.М.* Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистана -1987, №6, -С.9-11.