Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и его свойства

Азамов С.С.
Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

Задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов является одным из *важних задач* вычислительной математики. Эта задача исследована многими математиками и имеются несколько методов построения оптимальных квадратурных формул. Один из таких методов является метод предложенный С.Л. Соболевым в [1], который основывается на построения дискретного аналога некоторого дифференциального оператора. В связи с этим С.Л.Соболевым исследованы свойства дискретного аналога полигармонического оператора Δ^m, которые используются при построении оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$, где $L_2^{(m)}$ – пространство функций обобщенные производные m-го порядка интегрируемые с квадратом. В одномерном случае построение дискретного аналога дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} исследован З.Ж. Жамаловым, Х.М.Шадиметовым и в работе [3] дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} полностью построен. Далее задача построения дискретных аналогов некоторых дифференциальных операторов изучены в работах [4,7,8].

В натоящей работе мы исследуем задачу построения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_m)$, где

$$K_2(P_m)=\{\varphi \mid \varphi^{(m-1)} – \text{абсолютно непрерывная и } \varphi^{(m)}\in L_2\}$$

и $\int\limits_0^1(\varphi^{(m)}+\varphi^{(m-1)}+\varphi^{(m-2)})^2dx<\infty$

Норма функций в этом пространстве определяется формулой

$$\|\varphi|\,K_2(P_m)\|=\left[\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)+\varphi^{(m-2)}(x)\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Равенство (1) является полунормой и $\|\varphi\|=0$ тогда и только тогда когда $\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)+\varphi^{(m-2)}(x)=0$.

Дискретный оператор $D_m[\beta]$ удовлетворяет следующее равенство

$$D_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta], \tag{2}$$

где $G_m[\beta]$ – дискретная функция соответствующая функцию

$$G_m(x)=\frac{\text{sign}x}{2}\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!}-\sum\limits_{j=0}^{n-2}\frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!}-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\cosh\frac{x}{2},\\ m=3n,\ n=1,2,...,\\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!}-\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\cosh\frac{x}{2}+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\sinh\frac{x}{2},\\ m=3n+1,\ n=1,2,...,\\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!}-\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\cosh\frac{x}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\sinh\frac{x}{2},\\ m=3n+2,\ n=0,1...,\end{cases}$$

$\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ 0, & \beta\neq 0.\end{cases}$, $[\beta]=h\beta,\ \ h=\frac{1}{N},\ \ N=2,3,\dots.$

Функция $G_m(x)$ – является фундаментальным решением оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ (см. [6]), т.е. решение уравнения

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}\right)G_m(x)=\delta(x). \tag{3}$$

Здесь мы исследуем задачу построения дискретного аналога $D_m[\beta]$ при $m=3n+2$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Дискретный аналог дифференциального оператора* $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ *удовлетворяющий равенству (2) при* $m=3n+2$ *имеет следующий вид*

$$D_{3n+2}[\beta]=\frac{1}{p_{6n+2}^{(6n+2)}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{3n+1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2;\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{3n+1}A_k, & |\beta|=1;\\ C+\sum\limits_{k=1}^{3n+1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases} \tag{4}$$

где $C=-4\cosh(\frac{h}{2})\cdot\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}h)-6n-\frac{p_{6n+1}^{(6n+2)}}{p_{6n+2}^{(6n+2)}}$,

$$A_k=\frac{P_4(\lambda_k)(\lambda_k-1)^{6n}p_{6n+2}^{(6n+2)}}{\lambda_k\mathcal{P}'_{6n+2}(\lambda_k)}, \tag{5}$$

$$\mathcal{P}_{6n+2}(\lambda)=\sum_{s=0}^{6n+2}p_s^{(6n+2)}\lambda^s=\left[K\lambda^2+\left(\sinh(h)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}h)\right)\lambda+K\right]\times$$
$$\times(1-\lambda)^{6n}+P_4(\lambda)\times\left[\frac{h^5(1-\lambda)^{6n-6}}{5!}E_4(\lambda)+\frac{h^{11}(1-\lambda)^{6n-12}}{11!}E_{10}(\lambda)+...+\right.$$
$$+\frac{h^{6n-1}}{(6n-1)!}E_{6n-2}(\lambda)-\frac{h^3(1-\lambda)^{6n-4}}{3!}E_2(\lambda)-\frac{h^9(1-\lambda)^{6n-10}}{9!}E_8(\lambda)-...-$$
$$\left.-\frac{h^{6n-3}(1-\lambda)^2}{(6n-3)!}E_{6n-4}(\lambda)\right], \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh(\frac{h}{2})\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}h)-\sinh(\frac{h}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}h),\\
P_4(\lambda) &= \lambda^4-4\cosh(\frac{h}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}h)\lambda^3+2(1+\cosh(h)+\cos(\sqrt{3}h))\lambda^2\\
&\quad -4\cosh(\frac{h}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}h)\lambda+1.
\end{aligned}
$$

$p_{6n+2}^{(6n+2)}$, $p_{6n+1}^{(6n+2)}$ *– коэффициенты многочлена* $\mathcal{P}_{6n+2}(\lambda)$, λ_k *корни многочлена* $\mathcal{P}_{6n+2}(\lambda)$, *по модулю меньшие единицы,* $E_k(\lambda)$ *многочлен Эйлера [2].*

Теорема 2. *Дискретный аналог* $D_{3n+2}(h\beta)$ *дифференциального оператора* $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}}+\frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}}+\frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$ *удовлетворяет следующим равенствам*

1) $D_{3n+2}(h\beta)*e^{-\frac{1}{2}h\beta}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta=0,$

2) $D_{3n+2}(h\beta)*e^{-\frac{1}{2}h\beta}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta=0,$

3) $D_{3n+2}(h\beta)*e^{\frac{1}{2}h\beta}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta=0,$

4) $D_{3n+2}(h\beta)*e^{\frac{1}{2}h\beta}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta=0,$

5) $D_{3n+2}(h\beta)*(h\beta)^{\alpha}=0, \quad \alpha=\overline{0,6n-1},$

6) $D_{3n+2}(h\beta)*G_{3n+2}(h\beta)=\delta(h\beta).$

Здесь $G_{3n+2}(h\beta)$ *определяется равенствам (3), а* $\delta(h\beta)$*-дискретная дельта функция.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. - 808 с.

2. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. -Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996, -484 с.

3. *Шадиметов Х.М.* Дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. Вопр. вычисл. и прикл. математики. -Ташкент, 1985. 79. - С. 22 - 35.

4. *Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$. Узб. матем. журнал. 2004, №2, -С. 85-95.

5. *Максудов Ш., Салохиддинов М.С., Сирожиддинов С.* Комплекс узгарувчили функциялар назарияси. Тошкент, 1976.-363 б.

6. *Шадиметов Х.М., Азамов С.С.* Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы. Узб. матем. журнал. 2009, №2, -С.176-185.

7. *Хаётов А.Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$. Узб. матем. журнал. 2009, №3, -С. 81-88.

8. *Шадиметов Х.М., Азамов С.С.* Об одном дискретном аналоге одного дифференциального оператора. Узб. матем. журнал. 2010, №1, -С. 181-188.