Об одном погрешности весовых кубатурных формул в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$

Хаятов Х.У, Очилова Н.Т
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

Настоящая работа посвящена функциям n - переменных $f(x_1, x_2, ...x_n)$ принадлежащих в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$, т.е. $f(x_1, x_2, ...x_n) \in \tilde{C}^{(m)}(T_n)$, где T_n - n мерных тор.

Определение 1. Пространство $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ определяется как замыкание множество конечных рядов Фурье

$$\sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma,x)} = f(x)$$

в полунорме

$$\left\| f(x)|\tilde{C}^{(m)}(T_n) \right\| = \max_{x\in T_n} \left| \sum_{\gamma\neq 0} |\gamma|^m \hat{f}[\gamma]\, e^{-2\pi i(\gamma,x)} \right|, \tag{1}$$

где $(\gamma, x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k x_k$ и $\hat{f}[\gamma] =< f(x), e^{2\pi i(\gamma,x)} >= \int\limits_{T_n} f(x)\, e^{2\pi i(\gamma,x)} dx$, т.е. коэффициенты Фурье.

Рассмотрим кубатурную формулу.

$$\int_{T_n} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda f(x^{(\lambda)}), \tag{2}$$

где $P(x)$ - весовая функция, C_λ - коэффициенты и $x^{(\lambda)}$ - узлы кубатурной формулы (2).

Кубатурной формулы (2) сопоставим обобщенную функцию

$$\ell(x) = P(x)\varepsilon_{T_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}) \tag{3}$$

и назовем ее функционалом погрешности.

Здесь $\delta(x)$ - функция Дирака и $\varepsilon_{T_n}(x)$ - характеристическая функция тора T_n.

Справедливо следующая

Теорема. *Для нормы функционала погрешности (3) кубатурной формулы (2) в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ имеет место следующее равенство*

$$\left\| \ell(x)|\tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| = \inf_{\chi} \int_{T_n} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\hat{P}[\gamma] - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda\, e^{-2\pi i(\gamma,x^{(\lambda)})}}{|\gamma|^m} \cdot e^{2\pi i(\gamma,x)} + \chi \right| dx,$$

где χ- произвольное действительное число.

Доказательство. Известно, что пространство $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ является фактор - пространством по пространству действительных чисел, то

$$< \ell(x), 1 >= 0. \tag{4}$$

Так как

$$f(x) = \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma,x)},$$

где $\hat{f}[\gamma] =< f(x), e^{2\pi i(\gamma,x)} >$, то имеем

$$< \ell(x), f(x) > =< \ell(x), \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma,x)} >= \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] < \ell(x), e^{-2\pi i(\gamma,x)} >. \tag{5}$$

Для вычисление правую часть (5) сначала вычислим

$$< \ell_N(x), e^{2\pi i(\gamma,x)} > .$$

Пусть $\gamma = 0$, то имея введу (4) из (5) получим

$$< \ell(x), 1 >= \widehat{P}[0] - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda = 0 \tag{6}$$

В случае $\gamma \neq 0$ получим

$$< \ell(x), e^{-2\pi i(\gamma,x)} >= \hat{P}[-\gamma] - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda e^{-2\pi i(\gamma,x^{(\lambda)})}. \tag{7}$$

Таким образом, из (5) и (7) с учетом (6) имеем

$$< \ell(x), f(x) >= \int_{T_n} [\psi_m(x) + \chi] \overset{0}{f}(x) dx, \tag{8}$$

где

$$\psi_m(x) = \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\left[\hat{P}[\gamma] - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda e^{-2\pi i(\gamma,x^{(\lambda)})}\right]}{|\gamma|^m} \cdot e^{2\pi i(\gamma,x)},$$

$$\overset{0}{f}(x) = \sum_{\gamma\neq 0} |\gamma|^m \hat{f}[\gamma] \cdot e^{2\pi i(\gamma,x)}$$

Правую часть (3) обозначим через $L(\overset{0}{f}(x))$. Множество всех функций $\overset{0}{f}(x)$ образует подпространство пространства $C(T_n)$, которое обозначим $\overset{0}{C}(T_n)$.

Очевидно, чтобы вычислить норму функционала $< \ell(x), f(x) >$ над пространством $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$, имея в виду равенство (8), вычислим норму функционала $L(\overset{0}{f}(x))$ над пространством $\overset{0}{C}(T_n)$.

Применяя к (8) неравенство Гельдера, получим следующую оценку:

$$|< \ell(x), f(x) >| = \left| L(\overset{0}{f}(x)) \right| = \left| \int\limits_{T_n} [\psi_m(x) + \chi] \overset{0}{f}(x) dx \right| \leq \max_{x \in T_n} \left| \overset{0}{f}(x) \right| \int\limits_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| \, dx. \tag{9}$$

Так как неравенство (9) выполняется для всех χ, то справедливо неравенство

$$|< \ell(x), f(x) >| \leq \max_{x \in T_n} \left| \overset{0}{f}(x) \right| \inf_{\chi} \int\limits_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| \, dx = K \left\| f(x) | \tilde{C}^{(m)}(T_n) \right\|, \tag{10}$$

где

$$K = \inf_{\chi} \int\limits_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| \, dx \tag{11}$$

поэтому $\quad |< \ell(x), f(x) >| \leq K \left\| f(x) | \tilde{C}^{(m)}(T_n) \right\|.$

Из этого следует, что

$$\left\| \ell(x) | \tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| \leq K. \tag{12}$$

Докажем, что в неравенстве (10) фактически имеет место равенство, т.е.

$$\left\| \ell(x) | \tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| = K. \tag{13}$$

Для этого простроим максимизирующую последовательность функции $g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\int\limits_{T_n} g_\varepsilon(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \left\| g_\varepsilon(x) | \overset{0}{C}(T_n) \right\| = 1.$$

Такая последовательностью является последовательность функции

$$g_\varepsilon(x) = g(x) * \eta_\varepsilon(x) = \int\limits_{T_n} g(y) \eta_\varepsilon(x-y) dy = \int\limits_{T_n} \eta_\varepsilon(y) g(x-y) dy,$$

где

$$g(x) = sign[\psi_{m-S}(x) + \overset{0}{\chi}],$$

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} A_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Свертка $g(x) * \eta_\varepsilon(x)$ называется средней функцией, функция $\eta_\varepsilon(x)$ - ядро усреднения. Постоянную A_ε будем считать такой, что $\int\limits_{T_n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$, т.е. $A_\varepsilon \cdot \varepsilon^n \int\limits_{|\xi|} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}} d\xi = 1$

Пусть

$$T_0 = \{x : g_\varepsilon(x) = g(x)\} \quad \text{и} \quad \overset{0}{\psi}_m(x) = \psi_m(x) + \overset{0}{\chi}$$

тогда

$$|L[g_\varepsilon(x)]| = \left|\int\limits_{T_n} \overset{0}{\psi}_m(x) g_\varepsilon(x)dx\right| \geq \int\limits_{T_n} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx - \left|\int\limits_{T_n \setminus T_0} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx - \int\limits_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x) \cdot g_\varepsilon(x)dx\right|. \tag{14}$$

Так как $g_\varepsilon(x)$ слабо $g(x)$

$$\left|\int\limits_{T_n \setminus T_0} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx - \int\limits_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x) \cdot g_\varepsilon(x)dx\right| = \left|\int\limits_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x)[g(x) - g_\varepsilon(x)]dx\right| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

(см. [1]).

Значит правая часть (14) при $\varepsilon \to 0$ равна $\int\limits_{T_n} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx$. Таким образом,

$$\sup_{\left\|\overset{0}{f}\right\|=1} \left|\int\limits_{T_n} \overset{0}{\psi}_m(x) \overset{0}{f}(x)dx\right| \geq \int\limits_{T_n} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx. \tag{15}$$

Из (12) и (15) следует равенство (13), т.е.

$$\left\|\ell(x)|\tilde{C}^{(m)*}(T_n)\right\| = \int\limits_{T_n} \left|\overset{0}{\psi}_m(x)\right| dx = \int\limits_{T_n} \left|\psi_m(x) + \overset{0}{\chi}\right| dx = \inf_{\chi} \int\limits_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| \, dx.$$

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. - 808с.