Группы целочисленных автоморфизмов совершенных форм от восьми переменных

Гуломов О.Х., Шодиев С.Ю.
Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;
otabek10@mail.ru

Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, ..., x_n) = \sum_{I \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

положительно - определенная квадратичная форма от n переменных ($n \geq 2$) (п.к.ф.) с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, ..., n)$, матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$, определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$, арифметическим минимум $m = m(f)$ и представлениями минимума $\pm m_k = \pm(m_{ik}, ..., m_{nk})$ ($k = 1, ..., s;\ s = s(f)$), то есть $m(f) = f(\pm m_1) = ... = f(\pm m_s)$.

Говорят, что п.к.ф. f является совершенной формой (с.ф.) Вороного, если системой линейных уравнений

$$\sum_{I \leq i,j \leq n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, ..., s) \tag{2}$$

коэффициенты $a_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ формы f определяются однозначно. Так как система (2) однозначно определяет $N = \frac{n(n+1)}{2}$ неизвестных коэффициентов (a_{ij}), то $\frac{n(n+1)}{2} \leq s \leq 2^n - 1$ для любой совершенной формы.

Две п.к.ф. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, называются целочисленно эквивалентными, если существует целочисленная унимодулярная преобразование, $x = yU$ переводящее форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$. Здесь $\det(U) = \pm 1$ и элементы u_{ij} матрицы целые числа. Отсюда, в частности, в случае $f_1 = f_2 = fU$ называется целочисленным автоморфизмом формы, то есть $f(yU) = f(y)$.

Относительно операции умножения целочисленных унимодулярных матриц $n \times n$ совокупность целочисленных автоморфизмов данной п.к.ф. f составляет группу и она конечная. Мы эту группу будем обозначать через $Aut(f)$.

В работе [2] разработан алгоритм для вычисления $Aut(f)$ для с.ф. f от n переменных. Идея алгоритма [2] заключается в следующем. Прямоугольная $(s * n)$ матрица всех представлений минимума п.к.ф. f называется минимальной матрицей формы f и обозначается через $M = M(f)$, а миноры $n-$ го порядка этой матрицы называются минимальными определителями формы f. Минимальный определитель, абсолютная величина которого равна 1, называется базисным определителем формы f, а соответствующая матрица называется базисной подматрицей минимальной матрицы или базисной матрицей ([3],[2]). В решетке, отвечающей п.к.ф. f, базисной подматрице соответствуют основной репер минимальных векторов этой решетки. По минимальной матрице $M(f)$ п.к.ф. f вида (1) вычисляем матрицу $= MAM^T$, т.е. симметричную $(s \times s)$ матрицу, составленную из скалярных произведений (m_k, m'_k) представлений минимума m в метрике формы f . При этом каждой базисной подматрице матрицы M будет отвечать подматрица γ матрицы $M = M(f)$ являющаяся матрицей Грамма, соответствующей этой базисной матрице основного репера минимальных векторов. Теперь в матрице $\tilde{A}$ ищется максимальный набор одинаковых подматриц γ, отвечающих базисным минорам матрицы $M(f)$. Так как каждой подматрице γ соответствуют целочисленный автоморфизм формы f , то максимальному набору подматриц γ будет соответствовать группа $Aut(f)$ целочисленных автоморфизмов формы f .

На основе этого алгоритма, в частности, для форм

$$f = \sigma m_{10} = \varphi_1^8 + \frac{1}{3}\{x_1x_2 - x_3(x_4 + ... + x_8) - x_4(x_5 + ... + x_8) - x_5(x_6 + x_7 + x_8) - x_6(x_7 + x_8)\},$$

$$f = \sigma_{52} = \varphi_1^8 + \frac{1}{4}\{x_1x_2 - x_2(x_7 + x_8) - x_3(x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8) -$$
$$-x_4(x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8) - x_5(x_6 + 2x_7 + 2x_8) - 2x_6(x_7 + x_8)\}$$

непосредственными вычислениями получаются следующие предложения.

Теорема 1. Группа $Aut\ M(\sigma m_{10})$ имеет порядок 480 и ее можно представить в виде объединения 10 смежных классов по подгруппе S_4^* $Aut\ M(\sigma m_{10}) = U_{i=0}^9 S_4^* A_i$, где

$$\begin{array}{ll}
A_1: & x_1 \to y_2 - y_3, x_2 \to y_1 - y_3, x_3 \to -y_3, x_i \to y_1 + y_2 - y_3 - y_i (i = 4, ..., 8), \\
A_2: & x_1 \to y_2 - y_4, x_2 \to y_1 - y_4, x_3 \to -y_4, x_4 \to y_1 + y_2 - y_3 - y_4, x_i \to y_1 + y_2 - y_4 - y_i \\
& (i = 5, 6, 7, 8), \\
A_3: & x_1 \to y_2 - y_5, x_2 \to y_1 - y_5, x_3 \to -y_5, x_4 \to y_1 + y_2 - y_3 - y_5, \\
A_4: & x_1 \to y_2 - y_6, x_2 \to y_1 - y_6, x_3 \to -y_6, x_4 \to y_1 + y_2 - y_3 - y_6, x_5 \to y_1 + y_2 - y_4 - y_6, \\
& x_6 \to y_1 + y_2 - y_5 - y_6, x_i \to y_1 + y_2 - y_6 - y_i (i = 7, 8), \\
A_5 = & x_1 \to y_2, x_2 \to y_1, A_6 = A_5A_1, A_7 = A_5A_2, A_8 = A_5A_3, A_9 = A_5A_4,
\end{array}$$

A_0- единичная матрица. S_4^* : образующими элементами являются всевозможные перестановки x_3, x_4, x_5, x_6 и $x_7 \to x_8, x_8 \to x_7$ порядок подгруппы S_4^* равен 48.

Теорема 2. Группа $Aut\ M(\sigma_{52})$ имеет порядок 240, и ее можно представить в виде объединения 5 смежных классов по S_4^*:
$Aut\ M(\sigma_{52}) = U_{i=0}^4 S_4^* A_i$, где $S_4^*, A_0, A_1, A_2 A_3, A_4$ определены в теореме 1.

Следствие. Группа $Aut\ M(\sigma_{52})$ является подгруппой группы $Aut\ M(\sigma_{10})$, то есть $Aut\ M(\sigma_{52}) \subset Aut(\sigma m_{10})$.

Группы $Aut\ M(\sigma_{52})$ и $Aut\ M(\sigma_{10})$ нужны для отыскания совершенных форм смежных с совершенными формами σ_{52} и σ_{10} [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вороной Г.Ф.* О некоторых свойствах положительных квадратичных форм // Собр. Соч. Т.2 Киев Изд-во АН УССР 1952 с. 171-238.

2. *Шушбаев С.Ш.* Об одном алгоритме вычесления групп автоморфизмов совершенных форм // В кн:. "Численное интегрирование и смежные вопросы". Ташкенn, 1990, АН. Уз ССР .С. 90-108.

3. *Рышков С.С., Барановский Е.П.* Классические методы теории решетчатых упоковок // Успехи матем.Наук. 1979.34. №4, С.3-63.

4. *Шушбаев С.Ш., Гулямов О.Х.* К проблеме отыскания совершенных форм от восьми переменных. Новая совершенная форм // Узбек.матем .журн. 2001. №3,4, С. 70-75.

5. *Шушбаев С.Ш., Гулямов О.Х.* О совершенных формах от восьмы переменных. Новые совершенные формы // Труды VI международного семинара - совещания "Кубатурные формулы и их приложения". ИМ ВЦ УНЦ РАН. Уфа. 2002. С.188-197.