Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Жалолов Ф.И.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int\limits_{T_1} P(x)\, f(x)\, dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_λ - узлы и коэффициенты квадратурной формулы. Квадратурной формуле (1) сопоставим обобщчнную функцию

$$\ell(x) = p(x)\, \varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

и назовчм еч функционалом погрешности. Здесь $\varepsilon_{T_1}(x)$ - характеристическая функция T_1, $\delta(x)$- δ- функция Дирака и $p(x) \in L_2(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных на одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщчнные производные порядка m суммируемые с квадратом [1]. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если на нчм вести скалярное произведение

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)} = \int\limits_{T_1} f^{(m)}(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx + \left(\int\limits_{T_1} f(x)\, dx\right) \left(\int\limits_{T_1} \varphi(x)\, dx\right). \tag{3}$$

Норма определяется по формуле

$$\left\| f(x) | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int\limits_{T_1} f(x)\, dx\right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2. \tag{4}$$

Известно, что

$$\left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{|\langle \ell, \varphi \rangle|}{\left\| \varphi | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|}. \tag{5}$$

Определение 2. Квадратурная формула вида (1) называется наилучшей, если для нормы ее функционала погрешности $\ell(x)$ выполняется равенство

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \inf_{c_\lambda, x^{(\lambda)}} \left\| \ell(x) | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|.$$

В работе [2] найдена оптимальная формула над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T)$, когда узлы квадратурной формулы равноотстоящие и $p(x) = 1$.

В пространстве $\tilde{W}_p^{(\mu)}$ М.Д. Рамазановым [3] построена периодическая оптимальная кубатурная формула на решетке при $p(x) = 1$.

В настоящей работе рассматривается следующие задачи:

1. Вычисление нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

2. Построение наилучшей, т.е. оптимальной по коэффициентам c_λ и по узлам $x^{(\lambda)}$, весовой квадратурной формулы над пространством С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности весовой квадратурной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell(x) \,|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 =$$

$$= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}},$$

где c_λ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы вида (1) и $\hat{P}_k$ - коэффициенты Фурье функции $p(x)$.

Доказательство. Известно [1], что для функции $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} = \sum_{k} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x},$$

где $\hat{f}_k = \left\langle f(x), e^{2\pi i k x} \right\rangle = \int\limits_{T_1} f(x) e^{2\pi i k x} dx$, т.е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$\langle \ell(x), f(x) \rangle = \left\langle \ell(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \left\langle \ell(x), e^{-2\pi i k x} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \hat{\ell}_k = \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k\neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k}. \quad (6)$$

Здесь

$$\hat{\ell}_0 = \int_{T_1} \ell(x) dx, \quad \hat{\ell}_{-k} = \int_{T_1} \ell(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Применяя к правой части (6) неравенство Шварца, получим следующую оценку:

$$|\langle \ell(x), f(x) \rangle| =$$

$$= \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k\neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_k \right| \leq \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 \right| + \left| \sum_{k\neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k} (2\pi i k)^m \frac{1}{(2\pi i k)^m} \right| \times$$

$$\times\left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0\right|+\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|\left|\hat{\ell}_{-k}\right|\left|(2\pi ik)^m\right|\frac{1}{\left|(2\pi ik)^m\right|}\leq\left\{\left|\hat{f}_0\right|^2+\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|^2\left|2\pi k\right|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\left|\hat{\ell}_0\right|^2+\sum_{k\neq o}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{\left|2\pi k\right|^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\|f\left(x\right)|\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)\right\|\cdot\left\{\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{7}$$

$$\hat{p}_0=\int_{T_1}p(x)dx.$$

Принимая внимание (4), (5) и (7), получим

$$\left\|\ell\left(x\right)|\tilde{W}_2^{(m)*}\left(T_1\right)\right\|^2\leq\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}.\tag{8}$$

Рассмотрим следующую функцию из пространства $\tilde{W}_2^{(m)^*}\left(T_1\right)$

$$\psi_\ell\left(x\right)=\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{k^{(2m)}}.$$

Вычисляя скалярное произведение, получаем

$$\left\langle\ell\left(x\right),\psi_\ell\left(x\right)\right\rangle=\left\langle\ell\left(x\right),\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right\rangle+\left\langle\ell\left(x\right),\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{\left(2\pi\right)^{2m}k^{2m}}\right\rangle=$$

$$\left|\hat{P}_o-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2++\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k\hat{\ell}_k}{k^{2m}}=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}}.\tag{9}$$

На основании неравенств (8) и (9) для квадрата нормы функционала погрешности имеем

$$\left\|\ell\left(x\right)|\tilde{W}_2^{(m)*}\left(T_1\right)\right\|^2=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}\tag{10}$$

что и требовалось доказать.

2. Из (10) видно, что качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить еч. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по c_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача исследование функции на экстремум.

Значения c_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют наилучшую квадратурную формулу.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. Наилучшая весовая квадратурная формула вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$, $\lambda = 1, 2, ..., N$ и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \ = c_N = \overset{\circ}{c}$, которые выражаются формулой

$$\overset{\circ}{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{2m}} \sum\limits_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^{2m}}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{2m}} \sum\limits_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2m}} \right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул, М.: Наука, 1974. 808 с.

2. *Бабушка И.* Оптимальные квадратурные формулы. ДАН СССР, 1963, т.149, є2, с.227 - 229.

3. *Рамазанов М.Д.* Периодическая оптимальная кубатурная формула на пространстве $\tilde{W}_p^m$. Вычислительные технологии. 2006, Т.11, С.90-96.