Оптимальные квадратурные формулы для вычисления коэффициентов Фурье

Шадиметов Х.М., Абдукаюмов Б.Н.

Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta] \qquad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = e^{2\pi ipx}\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-h\beta) \qquad (2)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2^{(2)}(0,1)$ – пространство Соболева, $C[\beta]$ – коэффициенты квадратурной формулы, $h = 1/N$, $N = 2,3,...$, $p \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{[0,1]} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [0,1], \\ 1, & \text{при } x \in [0,1], \end{cases}$ $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $[\beta] = h\beta$.

Квадратурные формулы вида (1) широко используются при решении следующих важных классов прикладных задач: расчет спектрограмм, вычисление оценок сверки и корреляции, анализ сейсмограмм землятрясений, обработка изображений, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, анализ и синтез речевых сигналов, решение краевых задач для уравнений в частных производных, решение задач цифровой фильтрации и др. Поэтому построение оптимальных квадратурных формул вида (1) являются актуальными задачами вычислительной и прикладной математики.

Одной из первых работ, посвященных построению квадратурных формул вида (1) является работа Файлона [1]. Кроме того, различными методами построены квадратурные формулы вида (1) (см. [2]).

В настоящей работе построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$.

Справедливы следующие

Теорема 1. *В пространстве* $L_2^{(2)}(0,1)$ *существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (1) коэффициенты которой определяется равенствами*

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{C}[0] &= \frac{A_2 e^{2\pi ph}}{e^{2\pi iph}-1} - \frac{1}{2\pi ip} + d(1-q)(1-q^{N-1}),\\
\overset{\circ}{C}[\beta] &= A_2 e^{2\pi iph\beta} + 6d(q^{\beta}+q^{N-\beta}), \qquad \beta = 1,2,...,N-1,\\
\overset{\circ}{C}[N] &= \frac{A_2}{1-e^{2\pi iph}} + \frac{1}{2\pi ip} + d(1-q)(1-q^{N-1}),
\end{aligned}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{2h}{\cos(2\pi ph)+2}\cdot\left(\frac{\sin(\pi ph)}{\pi ph}\right)^4,\\
d &= \frac{1}{4h^3(\pi p)^4}\cdot\frac{3((\pi ph)^2-\sin^2(\pi ph))-2(\pi ph)^2\sin^2(\pi ph)}{(1+q^N)(3-2\sin^2(\pi ph))},\\
q &= \sqrt{3}-2.
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *В пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида*

$$\int_0^1 \cos(2\pi px)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} \overset{\circ}{C}[\beta]\varphi[\beta]$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{C}[0] &= \frac{A_2}{2}+d(1-q)(1-q^{N-1}),\\
\overset{\circ}{C}[\beta] &= A_2\cos(2\pi ph\beta)+6d(q^\beta+q^{N-\beta}), \qquad \beta=1,2,...,N-1,\\
\overset{\circ}{C}[N] &= \frac{A_2}{2}+d(1-q)(1-q^{N-1}).
\end{aligned}
$$

Теорема 3. *В пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида*

$$\int_0^1 \sin(2\pi px)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} \overset{\circ}{C}[\beta]\varphi[\beta]$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{C}[0] &= \frac{-A_2\mathrm{ctg}(\pi ph)}{2}+\frac{1}{2\pi p},\\
\overset{\circ}{C}[\beta] &= A_2\sin(2\pi ph\beta), \qquad \beta=1,2,...,N-1,\\
\overset{\circ}{C}[N] &= \frac{A_2\mathrm{ctg}(\pi ph)}{2}-\frac{1}{2\pi p}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно заметить, что в теоремах все оптимальные коэффициенты при фиксированных p и $h\to 0$ стремятся к нулю, т.е. $\lim\limits_{h\to 0}\overset{\circ}{C}[\beta]=0$, $\beta=\overline{0,N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filon L.N.G* On a quadrature formula for trigonometric integrals. -Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1928, 49, p. 38-47.

2. *Задирака В.К.* Теория вычисления преобразованиеч Фурье. - Киев: Наук. дум. 1983- 236 с.