Представление функционала погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева с нормой, осложненной биномиальными коэффициентами

Корытов И. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск; kor2003@inbox.ru

Аннотация

В работе показано представление финитного функционала погрешности через локально суммируемую функцию. В представлении используется известное фундаментальное решение одного эллиптического оператора. При этом, для нормирования пространства Соболева не используются псевдодифференциальные операторы. Ни норма, ни представление функционала не совпадают с описанными ранее ни при каких значениях наибольшего порядка производных функций рассматриваемого класса.

Локально суммируемая функция, реализующая функционал погрешности кубатурной формулы в основном пространстве, является решением некоторого дифференциального уравнения с частными производными в обобщенных функциях. Если уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, то такая функция представляет собой свертку правой части с фундаментальным решением. В случае фактор-пространств таким уравнением выступает полигармоническое, где оператором является оператор Лапласа соответствующего порядка [1], [2]. В пространстве же Соболева, нормированном с участием производных всех порядков, оператор содержит сумму операторов Лапласа с возрастанием порядка, и нахождение фундаментального решения такого уравнения представляет значительную трудность. Поскольку уравнение строится на основе нормы основного пространства, то задача решается обычно подбором такой нормы, чтобы фундаментальное решение соответствующего уравнения было известным.

В данной работе в отличие от [3] норма определена таким образом, что при ее построении не используются псевдодифференциальные операторы.

Рассматривается пространство Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ основных функций φ с нормой

$$\left\|\varphi \,\middle|\, W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)\right\| = \left(\int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left|D^\alpha \varphi\right|^p dx \right)^{1/p}. \qquad (1)$$

Функционал погрешности кубатурной формулы

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left(\chi_\Omega(x) - \sum_{k=0}^{N} c_k \delta\left(x - x^{(k)}\right) \right) \varphi(x) dx,$$

где c_k — коэффициенты, $x^{(k)}$ — узлы, является финитным: $\exists r > 0$: $\operatorname{supp} l \subset B(a, r)$. Здесь $B(a, r)$ шар с центром $a \in \mathbf{R}_n$ и радиусом r. Область интегрирования $\Omega \subset B(a, r)$ имеет характеристическую функцию

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

На параметры пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ накладываются ограничения

$$pm > n, \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{2}$$

Покажем, что представление существует, единственно и реализуется функцией, локально суммируемой в степени q вместе со всеми своими производными.

Теорема 1. *Существует функция $\psi \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, реализующая на произвольной функции $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ с нормой (1) и при условиях (2) данный линейный функционал в виде*

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha \psi D^\alpha \varphi dx \tag{3}$$

с нормой $\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. = \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.$.

Доказательство. Последовательное применение неравенств Гельдера к выражению (3) приводит к оценке

$$|\langle l, \varphi \rangle| \le \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. \left\| \varphi \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.,$$

что означает, во-первых, ограниченность функционала, во-вторых, необходимость принадлежности функции ψ пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, откуда

$$\frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\left\| \varphi \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.} \le \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right..$$

Далее, поскольку правая часть неравенства не зависит от функций $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, и неравенство верно для всех таких функций, то

$$\sup_{\varphi \ne 0} \frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\left\| \varphi \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.} \le \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.,$$

что согласно определению нормы дает

$$\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. \le \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.. \tag{4}$$

Для построения обратного неравенства рассмотрим функционал на функции θ:

$$D^\alpha \theta = |D^\alpha \psi|^{1/(p-1)} \operatorname{sign} D^\alpha \psi, \quad \forall |\alpha| \le m, \tag{5}$$

он будет равен

$$\langle l, \theta \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^q dx = \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.^q. \tag{6}$$

Далее из (5) следует

$$D^\alpha \psi = |D^\alpha \theta|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \theta, \quad \forall |\alpha| \le m.$$

Известно, что для любой $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, функция $|f|^{p-1}\mathrm{sign} f \in L_q$ [1]. Так как $\psi \in W_q^{(m)}$, то $D^\alpha \psi \in L_q$, следовательно, $D^\alpha \theta \in L_p$, $|\alpha| \le m$, $\theta \in W_p^{(m)}$. Таким образом, норма функции θ удовлетворяет соотношению

$$\left\| \theta \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.^p = \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.^q. \tag{7}$$

Далее из

$$\langle l, \theta \rangle \le \left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. \left\| \theta \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right..$$

с учетом(6) и (7)следует

$$\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. \ge \frac{|\langle l, \theta \rangle|}{\left\| \theta \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right.} = \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right..$$

Получилось неравенство, обратное к (4), следовательно,

$$\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \right. = \left\| \psi \left| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| \right..$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Функция, реализующая представление (3) в условиях теоремы 1, единственна в пространстве обобщенных функций и имеет вид*

$$\psi = G_{2m} * l \tag{8}$$

где G_{2m} — фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha}.$$

Доказательство основано на интегрировании по частям (3)

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi \varphi dx,$$

что равносильно дифференциальному уравнению в обобщенных функциях

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi = l.$$

Оператор уравнения линеен и имеет постоянные коэффициенты. Согласно [4] решение такого уравнения единственно в пространстве обобщенных функций и равно свертке его фундаментального решения с правой частью, что доказывает утверждение теоремы. Фундаментальное решение его известно и приведено в [5].

Теорема 3. *Функция (8) в условиях (2) принадлежит пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ с нормой вида (1).*

Доказательство. Для доказательства требуется установить суммируемость в степени q частных производных всех порядков $|\alpha| \le m$ функции G_{2m}. На основании оценок [5]

$$|D^\alpha G_{2m}| \le C e^{-|x|} |x|^{\frac{2m-n-1}{2}}, \quad |x| > 1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу, и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая. Несобственный интеграл от оценивающей функции

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C(1 - \ln|x|), \quad |x| < 1,$$

сходится при $n - 2m + |\alpha| = 0$ и четном $|\alpha|$. При $n - 2m + |\alpha| < 0$ интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C, \quad |x| < 1,$$

является собственным. При $n - 2m + |\alpha| = 0$ и нечетном $|\alpha|$ или $n - 2m + |\alpha| > 0$ несобственный интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x| < 1,$$

возведенной в степень q сходится при $p(2m - |\alpha|) > n$. Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка оцениваются сходящимся несобственным интегралом при $pm > n$.

На основании сказанного и с учетом ограниченности линейного функционала в L_q [1] для всех $|\alpha| \leq m$ интегралы от производных свертки, возведенных в степень q, сходятся при $pm > n$, следовательно $D^\alpha G_{2m} {*} l \in L_q(\mathbf{R}_n)$, $|\alpha| \leq m$ и $G_{2m} {*} l \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, т. е. свертка и ее производные всех порядков локально суммируемы в степени q.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974.

2. *Половинкин В. И.* Формула для функций, реализующих функционалы // Сибирский математический журнал. 2001. Том 42, №4. С. 920–925.

3. *Шойнжуров Ц. Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных : Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. Улан-Удэ, 1977.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.

5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977.