УДК 512.54+512.54.03

ЭЛЕМЕНТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ УНИПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

Зотов И.Н.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Левчук В.М.
Институт математики, Сибирский федеральный университет

В группе Шевалле над полем K, ассоциированной с системой корней Φ, унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые элементы $x_r(t)$ $(r \in \Phi^+, t \in K)$, то есть определенные автоморфизмы алгебры Шевалле типа Φ над K. Мы исследуем известный вопрос об элементарно эквивалентных группах $U\Phi(K)$.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ называются элементарно эквивалентными (пишем $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}'$), если любое предложение языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Известно, что две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. В общем случае, элементарно эквивалентные модели не обязаны быть даже равномощными. Так, элементарно эквиваленты поля комплексных и алгебраических чисел. С другой стороны, конечная модель элементарно эквивалентна любой своей ультрастепени, а поэтому и как угодно большой мощности.

Согласно К.Видэла (Proceed. AMS, 109 (1990), No. 2), если некоторая группа G элементарно эквивалентна группе $U\Phi(K)$ и $char\ K \neq 2, 3$, то существует поле $F \equiv K$ такое, что $G \cong U\Phi(F)$. Его доказательство опирается на полученное Гиббсом (J. Algebra, 14 (1970)) описание группы автоморфизмов $Aut\ U\Phi(K)$ при $char\ K \neq 2, 3$.

Известно, что $p(\Phi) = max\{(r,r)/(s,s\ ) \mid r,s \in \Phi\}$ равно 1, 2 или 3. Доказана

Теорема 1. Пусть $G \equiv U\Phi(K)$ и $p(\Phi)!K = K$. Тогда $G \cong U\Phi(F)$ для некоторого поля $F \equiv K$.

Изложим схему доказательства, использующего описание $Aut\ U\Phi(K)$ (В.М.Левчук, Алгебра и Логика, 29 (1990)). Как обычно, Π – база в Φ, $ht(r)$ – высота корня r, h – число Кокстера системы Φ и ρ – максимальный корень.

Множество $X \subset G$ называют определимым в модели M, если

$$\forall x \in X(x \in G \leftrightarrow M \vDash \varphi(x))$$

для какой-либо формулы $\varphi(x)$ языка первого порядка группы G с одной свободной переменной. Если φ не содержит параметров, то X называют 0-определимым.

Лемма 1. Группу $U\Phi(K)$ при $p(\Phi)!K = K$ порождают корневые элементы $x_\alpha(1)$ $(\alpha \in \Pi)$ вместе с их образами относительно диагональных автоморфизмов.

Если $\Pi = \{r_1, \ldots, r_n\}$, то набор элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы $U\Phi(K)$, $n = rank\ \Phi$, называют её фреймом с обозначением $\mathcal{F} = \{g_1, \ldots g_n\}$, согласно К.Видэла, если коммутаторные соотношения между элементами в $\mathcal{F}$ такие же, как и для набора $\{x_{r_1}(1), \ldots, x_{r_n}(1)\}$, называемого стандартным фреймом.

Стандартный центральный ряд группы U образуют подгруппы

$$U_i = \langle x_r | r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle\ (1 \leq i \leq h).$$

Известно, что при $p(\Phi)!K = K$ верхний и нижний центральные ряды в U стандартны, в частности, $U_{h-1} = X_\rho = x_\rho(K)$ – центр в U.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F} = \{g_1, \dots g_n\}$ – фрейм унипотентной группы $U = U\Phi(K)$ лиевого ранга n над полем K и

$$g_i = \prod_{i=1}^{n} x_{r_i}(\boldsymbol{t}_{ij})\ (mod\ U_2), j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда $(\boldsymbol{t}_{ij})$ есть обратимая диагональная матрица, с точностью до сопряжения $\mathcal{F}$ автоморфизмом группы U, а элементы $\boldsymbol{t}_{ii}$ могут быть любыми обратимыми элементами из K.

Далее, по аналогии с К. Видэлой, мы устанавливаем определимость корневой подгруппы X_r и интерпретируемость основного поля K в центре группы $U\Phi(K)$, который при $p(\Phi)!K = K$ равен $U_{h-1} = X_\rho$. Завершение доказательства основной теоремы связано с переходом к насыщенным моделям и тем, что для элементарно эквивалентных насыщенных моделей линейных групп основные кольца (или поля) коэффициентов изоморфны.

Отметим, что условие $p(\Phi)!K = K$ в лемме 1 и теореме 1 нельзя отбросить.

При этом же ограничении мы исследуем вопрос об элементарно эквивалентных алгебрах $N\Phi(K)$, ассоциированных с унипотентными подгруппами $U\Phi(K)$.

Работа поддержана грантом РФФИ и Мин.обр.науки (тема 1.34.11).