



## ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ-2015

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ,  
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ,  
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
**«ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ-2015»**,  
ПОСВЯЩЕННОЙ 70-ЛЕТИЮ ВЕЛИКОЙ ПОБЕДЫ

КРАСНОЯРСК, СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

15-25 АПРЕЛЯ 2015 Г.

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Сборник материалов  
Международной конференции студентов,  
аспирантов и молодых ученых  
«Перспектив Свободный-2015»,  
посвященной 70-летию Великой Победы

Красноярск, Сибирский федеральный университет, 15-25 апреля 2015 г.

Красноярск, 2015.

# «Инженерная математика»



ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ-2015

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Красноярск, Сибирский федеральный университет, 15-25 апреля 2015 г.

## ПОСТРОЕНИЕ БИРЖЕВОГО ГРАФИКА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ НА ПРИМЕРЕ ЦЕН НА МЕДЬ ЗА ПЕРИОД 2014 ГОДА

Антонов В.А.

научный руководитель Кубикова Н.Б.

Сибирский федеральный университет

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом. Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой, декартовой или прямоугольной системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается  $r$ ) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата также называется полярным углом или азимутом и обозначается  $\phi$ , равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

Необычный формат биржевых графиков предложил в 1990-е годы российский математик Владимир Иванович Елисеев. (Рис.1)

Где  $P$ - цена сделки

$\Phi$ -время ее совершения

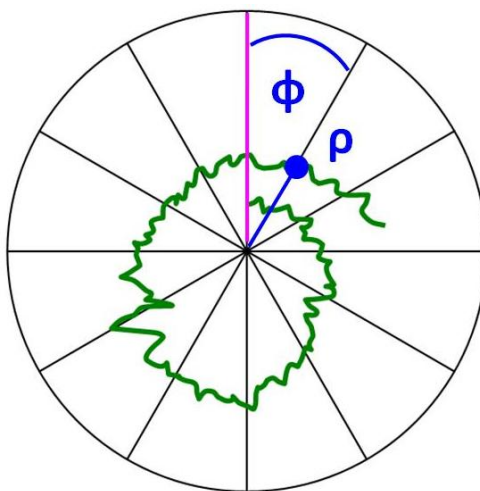


Рис.1. Биржевой график

Таблица 1. Цены на медь за 2014 год. (USD/тонна).

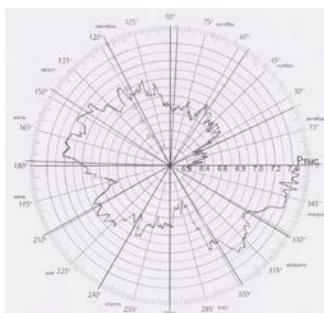
Месяц Число	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	7493	7040	7031	6694	6669	6915	7058	7096	6949	6673	6720	6397
2	7464	7040	6994	6694	6762	6980	7186	7091	6963	6629	6725	6364
3	7391	7005	6994	6680	6757	6922	7217	7150	6903	6616	6753	6326
4	7454	7044	7083	6661	6729	6822	7219	7160	6945	6613	6752	6415
5	7496	7037	7058	6671	6728	6817	7210	7055	6993	6692	6619	6402
6	7407	7107	6795	6699	6693	6748	7190	6980	6995	6692	6644	6413
7	7407	7156	6800	6732	6696	6742	7180	6992	7000	6687	6696	6350
8	7463	7100	6713	6716	6745	6731	7188	7012	7021	6680	6688	6359
9	7267	7100	6713	6698	6802	6731	7172	7011	6849	6685	6685	6450
10	7367	7122	6500	6705	6805	6743	7209	7000	6863	6692	6649	6373
11	7472	7177	6511	6706	6850	6688	7210	7000	6823	6696	6694	6452
12	7357	7165	6440	6703	6934	6639	7214	6944	6840	6696	6675	6455
13	7346	7192	6447	6600	6901	6671	7200	6876	6840	6710	6589	6458
14	7394	7192	6481	6680	6960	6672	7173	6810	6841	6783	6716	6325
15	7366	7192	6500	6720	6933	6721	7163	6850	6811	6632	6712	6321
16	7373	7232	6500	6721	6933	6721	7081	6854	6965	6658	6705	6306
17	7365	7241	6510	6721	6936	6750	7091	6854	6906	6621	6700	6337
18	7365	7241	6568	6713	6975	6758	7028	6856	6822	6624	6613	6277
19	7365	7232	6459	6713	6975	6775	7032	6810	6809	6584	6648	6374
20	7365	7251	6503	6713	6929	6872	7052	6986	6807	6584	6648	6387
21	7380	7246	6501	6738	6891	6869	7052	7005	6700	6681	6695	6340
22	7337	7190	6501	6741	6923	6934	7064	7062	6712	6640	6686	6336
23	7234	7190	6480	6869	6976	6934	7071	7064	6689	6687	6670	6311
24	7210	7167	6630	6878	6983	6935	7192	6090	6735	6696	6611	6278
25	7195	7120	6536	6880	7026	6976	7150	6097	6692	6702	6520	6219
26	7183	7131	6598	6881	6990	6949	7160	6029	6698	6710	6531	6201
27	7170	7031	6693	6848	6984	6942	7151	6997	6695	6742	6522	6203
28	7144		6695	6778	6934	6942	7150	6888	6715	6812	6315	6207
29	7115		6700	6686	6903	7000	7101	6922	6718	6788	6350	6207
30	7037		6702	6666	6905	7038	7151	6911	6634	6747	6370	6286
31	7040		6677		6915		7122			6729	6380	6226

Целью нашей работы является рассмотрение нового применения полярной системы координат. Построить биржевой график цен на медь за период 2014 года, проанализировать получившиеся график, сделать выводы по данному графику.

В таблице 1 представлены цены на медь за период 2014 год (USD/тонна).

С учетом данных мы отмечаем на графике цену за медь. Один градус соответствует одному дню в году. В году 365 – 366 градусов, в полярной системе координат 360 градусов. В итоге мы получим такой график представленный на рисунке 1.

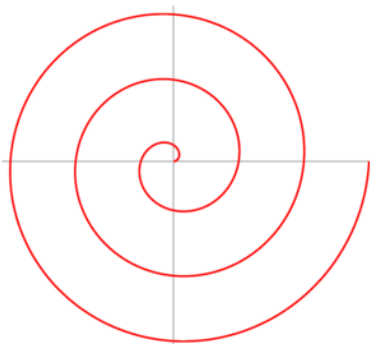




*Рис.1. График цены за медь (USD/тонна) за 2014 год*

Полученный график иллюстрирует сильное падение цены на медь. За 2014 год цена на медь упала на 1267 долларов. На графике видно, что пик падения цены на медь приходится на начало года, т.е. на март месяц. Стоит заметить, что в стране в это время кризис не наблюдался. Второй пик падения цены на медь приходится на конец года, т.е. на ноябрь, декабрь месяц. В этот период в стране начался экономический кризис - это могло явиться причиной падения цены.

Получившийся график относительно похож на архимедову спираль (Рис.2).



*Рис.2. Архимедова спираль*

**Вывод:** Мы построили биржевой график цен на медь за 2014 год. За этот год цены на медь обрушивались два раза. Первый раз цены упали в начале года, после этого цены не вернулись на прежние позиции. Второй обвал цен пришелся, наконец, 2014 года. Эти данные могут быть полезны для металлургических предприятий. Ориентируясь на график можно просчитать благоприятные и не благоприятные последствия на металлургическую отрасль. Так же можно отследить факторы падения цен и их повторения в следующем году. Так же можно посчитать суммарные потери предприятия от цен на рынке. Возможно, построить график для стратегически важных сырьевых ресурсов страны. Получившийся график относительно похож на архимедову спираль.

### **Библиографический список**

1. Мышкин А.Д. Лекции по высшей математике. Издание четвертое стереотипное. Издательство «наука» Главная редакция физико-математической литературы. М.: 1973. - 640 с.
2. Чеусова Е.П., Максимова Н.М.. Аналитическая геометрия: практикум. ГАЦ-МиЗ. – Красноярск, 2001. – 96.с.
3. В.С.Чучков В.С., Мокрослоев Д.Д., Автухова А.Т. полярная система координат и построение графиков функции. ГАЦМиЗ – Красноярск 1984.– 12с.



## РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СЕТЕВОЙ ПОДСТАНОВКЕ

Волченко А. М., Двойнова В. Е.  
старший преподаватель Климович Л. В.  
Сибирский федеральный университет

Транспортная задача – это математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

Целью транспортной задачи является обеспечение получения (доставки) продукции (товара) потребителю в нужное время и место при минимально возможных совокупных затратах трудовых, материальных, финансовых ресурсов.

В настоящее время транспортная задача очень актуальна. В связи с развитием рынка, торгово-экономических отношений ее решение и нахождение оптимального плана перевозок является необходимым аспектом эффективной предпринимательской деятельности.

Рассмотрим решение транспортной задачи с помощью графов.

Шаг 1. Задана следующая транспортная сеть:

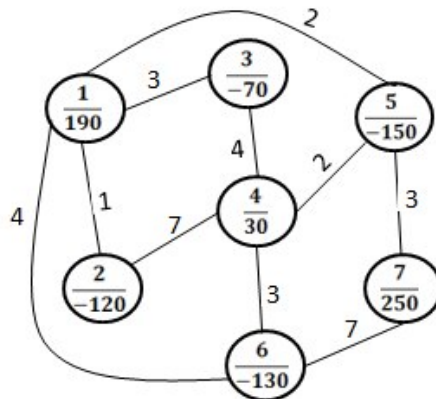


Рисунок 1.

Верхнее число вершины — это номер соответствующего поставщика или потребителя, нижнее число вершины — это мощность поставщика (для положительных чисел) или спрос потребителя (для отрицательных чисел).

У поставщиков 1, 4 и 7 есть 190, 30 и 250 единиц груза соответственно. Потребителям 2, 3, 5 и 6 требуется 120, 70, 150 и 130 единиц груза соответственно.

Стоимость перевозки единицы груза от поставщика 1 до потребителя 2 равна 1, стоимость перевозки единицы груза от поставщика 7 до потребителя 5 равна 3 и т. д.

Суммарная мощность поставщиков равна  $190+30+250=470$ , суммарный спрос потребителей равен  $120+70+150+130=470$ . Это закрытая модель.

Шаг 2. . Найдем первоначальный план поставок. Способ расстановки стрелок может быть любым. Все поставки указаны стрелками.

На рисунке 2 не трудно заметить, что у нас 5 стрелок и 7 вершин. Не выполняется следующее условие: число стрелок = число вершин-1, так как  $5 < 7 - 1$

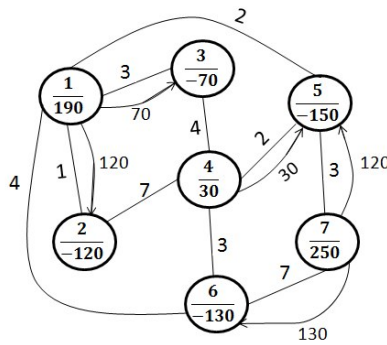


Рисунок 2.

Введем еще одну стрелку с нулевой поставкой. Например,  $1 \rightarrow 5$ . Получим следующий первоначальный план поставок:

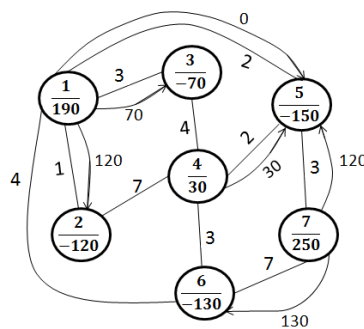


Рисунок 3.

Затраты на перевозку равны  $120 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 120 \cdot 3 + 130 \cdot 7 = 1660$ .

Шаг 3. Проверим план поставок на оптимальность. Для этого требуется вычислить потенциалы вершин.

Одной из вершин припишем неотрицательное значение потенциала (например, 0). Для наглядности потенциал будем заключать в квадрат. Двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин по следующему правилу:

1) если мы двигаемся по стрелке, то к потенциалу вершины прибавляем стоимость перевозки единицы груза по этой стрелке (а не число, которое написано на стрелке);

2) если мы двигаемся против стрелки, то из потенциала вершины вычитаем стоимость перевозки единицы груза по этой стрелке.

После вычисления потенциалов вершин нужно найти характеристики ребер без стрелок по следующему правилу: стоимость перевозки единицы груза для данного ребра - больший потенциал вершин этого ребра + меньший потенциал вершин этого ребра.

Если нет ребер с отрицательными характеристиками, то получен оптимальный план поставок.

Проверим план поставок из шага 2 на оптимальность. Припишем вершине 1 потенциал 0.

Из вершины 1 в вершину 2 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 1. Поэтому потенциал вершины 2 равен 0 (потенциал вершины 1) + 1 (стоимость перевозки единицы груза по ребру  $1 \rightarrow 2$ ) = 1.

Из вершины 1 в вершину 5 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 2. Поэтому потенциал вершины 5 равен 0 (потенциал вершины 1) + 2 (стоимость перевозки единицы груза по ребру  $1 \rightarrow 5$ ) = 2.



В вершину 5 из вершины 7 ведет стрелка. Стоимость перевозки единицы груза для данного ребра равна 3. Поэтому потенциал вершины 7 равен 2 (потенциал вершины 5)-3 (стоимость перевозки единицы груза по ребру  $7 \rightarrow 5$ ) = -1. И т. д.

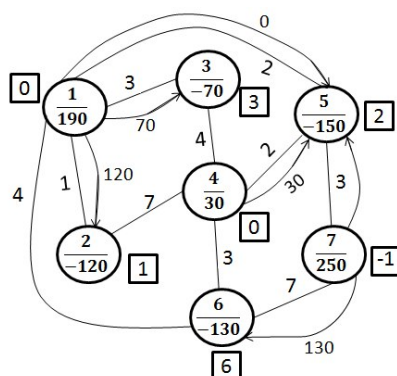


Рисунок 4.

У нас четыре ребра без стрелок: (1, 6), (2, 4), (3, 4), (4, 6). Найдем их характеристики.

Характеристика ребра (1,6) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (1,6) — больший потенциал вершин ребра (1,6) + меньший потенциал вершин ребра (1, 6) =  $4 - 6 + 0 = -2 < 0$ .

Характеристика ребра (4, 6) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (4, 6) - больший потенциал вершин ребра (4, 6) + меньший потенциал вершин ребра (4, 6) =  $3 - 6 + 0 = -3 < 0$ .

Характеристика ребра (2, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (2, 4) - больший потенциал вершин ребра (2, 4) + меньший потенциал вершин ребра (2, 4) =  $7 - 1 + 0 = 6$ .

Характеристика ребра (3, 4) = стоимость перевозки единицы груза для ребра (3, 4) - больший потенциал вершин ребра (3,4) + меньший потенциал вершин ребра (3, 4) =  $4 - 3 + 0 = 1$ .

Характеристики ребер (4, 6) и (1, 6) отрицательны. Поэтому полученный план поставок не является оптимальным.

#### Шаг 4 Улучшение плана поставок

В шаге 3 у ребра (4, 6) наименьшая отрицательная характеристика (-3). Рисуем к нему стрелку от вершины с меньшим потенциалом (4) к вершине с большим потенциалом (6).

На рисунке 5 видно, что образуется замкнутый контур из стрелок  $4 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 5 \leftarrow 4$  (при этом неважно, двигаемся мы по стрелкам или против них). В этом контуре направление стрелок  $6 \leftarrow 7$  и  $5 \leftarrow 4$  противоположно направлению новой стрелки  $4 \rightarrow 6$ .

Определим минимум среди поставок для стрелок  $6 \leftarrow 7$  и  $5 \leftarrow 4$ :  $\min(30, 130) = 30$ .

Для контура  $4 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 5 \leftarrow 4$  поставки на стрелках в направлении новой стрелки  $4 \rightarrow 6$  ( $4 \rightarrow 6$  и  $7 \rightarrow 5$ ) увеличим на этот минимум. Это будет  $0 + 30 = 30$  и  $120 + 30 = 150$  соответственно.

Для контура  $4 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 5 \leftarrow 4$  поставки на стрелках  $6 \leftarrow 7$  и  $5 \leftarrow 4$  уменьшим на этот минимум. Это будет  $130 - 30 = 100$  и  $30 - 30 = 0$  соответственно, т. е. стрелку  $4 \rightarrow 5$  ликвидируем.



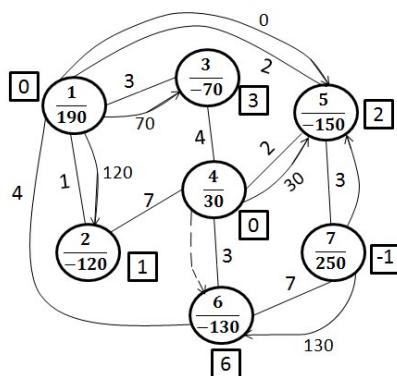


Рисунок 5.

Поставки для стрелок вне контура остаются без изменений. Число стрелок = 6 = число вершин — 1. Получаем следующий план поставок. Исследуем его на оптимальность. В результате всех проверок приходим к плану:

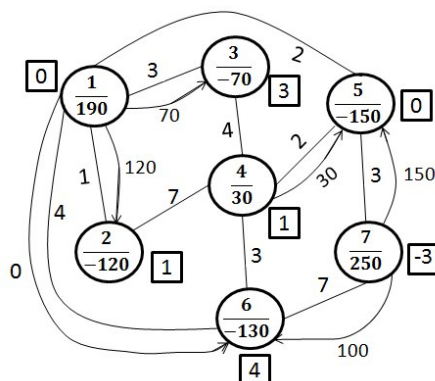


Рисунок 6.

Убеждаемся, что нет ребер с отрицательными характеристиками, т. е. это оптимальный план поставок. Затраты на перевозку равны:

$$120 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 150 \cdot 3 + 100 \cdot 7 = 1570.$$

Поставленная транспортная задача успешно решена. Найден лучший план перевозок за счет чего затраты сокращены на 5%.

Необходимость решения таких транспортных задач, с минимизацией издержек на перевозку, определяется большим экономическим эффектом при нахождении лучшего решения, т.к. это явно увеличивает прибыль предприятия. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект.

### Список литературы

1. Гончарова Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсы дискретной математики. - М.: Наука, 2007.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: учеб. - М.: Академия, 2009.
3. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс. - М.: Известия, 2011.



## КЛАСТЕРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЗОН ГРАНАТА

Головченко А. Е.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Мансурова Т. П.

*Сибирский федеральный университет*

*Институт горного дела, геологии и геотехнологий*

В процессе исследования какого-либо объекта или явления зачастую встаёт проблема большого количества независимых наблюдений, индивидуальное изучение которых не рационально. К одному из возможных решений данной проблемы относится кластеризация.

Кластеризация, она же *кластерный анализ* – это совокупность методов, способ группировки многомерных объектов, выполняющий сбор данных, содержащих информацию о выборке объектов, и затем упорядочивающий объекты в сравнительно однородные группы (кластеры, таксоны). В свою очередь *кластер* это компактная группа связанных друг с другом элементов, которая обладает свойствами, выделяющими её из общего множества элементов.

*Формальная постановка задачи кластеризации* - пусть  $X$  — множество объектов,  $Y$  — множество имён кластеров. Задана функция расстояния между объектами  $r(x, x')$ . Имеется конечная общая выборка объектов  $X_m = \{x_1, \dots, x_m\} \in X$ .

Требуется разбить данную выборку на непересекающиеся подмножества, называемые кластерами, так, чтобы каждое подмножество состояло из объектов, близких по метрике, а объекты разных подмножеств существенно отличались. При этом каждому объекту  $x_i \in X^m$  приписывается номер подмножества  $u_i$ .

*Алгоритм кластеризации* — это функция  $\alpha: X \rightarrow Y$ , которая любому объекту  $x \in X$  присваивает номер кластера  $u \in Y$ . Конечное количество кластеров в некоторых случаях известно заранее, однако чаще ставится задача определить оптимальное число подмножеств, с точки зрения того или иного критерия качества кластеризации. В этом заключается отличие кластеризации от классификации, где изначально известно как само множество, так и количество меток исходных объектов.

По способу обработки данных *методы кластеризации* делятся на *иерархические* и *неиерархические*. Среди алгоритмов иерархической кластеризации выделяются два основных типа: *агломеративные* и *дивизимные* алгоритмы. Дивизимные алгоритмы работают по принципу «сверху-вниз»: вначале все объекты помещаются в один кластер, который затем разбивается на все более мелкие кластеры. Более распространены агломеративные алгоритмы, которые в начале работы помещают каждый объект в отдельный кластер, а затем объединяют кластеры во все более крупные, пока все объекты выборки не будут содержаться в одном кластере. Результаты таких алгоритмов обычно представляют в виде дерева – дендрограммы.

Неиерархическая кластеризация состоит в разделении набора данных на определенное количество отдельных кластеров, для чего существует два подхода. Первый заключается в определении границ кластеров как наиболее плотных участков в многомерном пространстве исходных данных, т.е. определение кластера там, где имеется большое "сгущение точек". Второй подход заключается в минимизации меры различия объектов.

Что касается методов объединения кластеров, то мы будем использовать метод Варда, согласно которому расстояние между кластерами определяется как прирост



суммы квадратов расстояний объектов до центров кластеров, получаемый в результате их объединения. Также довольно часто используются такие методы, как метод одиночной связи, метод наиболее удалённых соседей или, как его еще называют, метод полной связи, метод невзвешенного попарного среднего, метод взвешенного попарного среднего, а также взвешенный центроидный метод.

В качестве меры расстояния между объектами будем использовать евклидово расстояние, которое есть ни что иное как геометрическое расстояние в многомерном пространстве, определяется оно как  $S(x,y) = \{\sum_i (x_i - y_i)^2\}^{1/2}$ .

Проведём кластерный анализ на примере изучения химического состава центральных зон граната. Данный анализ позволяет судить об обстановке минералообразования, в результате которого данная порода была образована, а также о месте её образования.

Для работы возьмём выборку из 30 проб. Исходные данные выглядят следующим образом [Таб.1]:

Таблица 1.

	1 SiO2	2 TiO2	3 Al2O3	4 Cr2O3	5 FeO	6 MnO	7 MgO	8 CaO	9 Na2O	10 K2O
1	36.79	0.1	20.2	0.02	24.59	10.53	1.02	5.49	0	0
2	36.89	0.09	20.36	0	25.15	10.1	1.08	5.63	0.03	0
3	38.57	0.13	19.91	0	23.95	9.92	1.18	5.82	0.02	0.01
4	36.52	0.07	20.47	0	25.12	11.32	1.13	4.22	0.05	0
5	36.57	0.12	20.56	0.01	24.98	9.87	1.45	5.77	0.05	0.01
6	36.64	0.04	20.74	0.01	31.61	6.98	1.51	2.05	0.02	0.01
7	38.03	0.03	19.95	0.05	32.27	6.67	1.58	2.02	0.07	0
8	36.45	0.05	20.7	0	32.19	6.81	1.43	2.12	0	0
9	36.6	0.11	20.7	0.05	31.83	6.92	1.48	2.21	0	0
10	36.1	0.13	20.51	0.06	31.45	6.88	1.33	2.17	0	0
11	36.63	0.09	20.62	0	30.31	8.95	1.31	2.2	0.05	0
12	36.78	0.05	20.66	0.03	30.39	8.4	1.42	2.07	0.06	0
13	36.53	0.05	20.52	0	30.69	8.04	1.34	2.1	0.08	0
14	36.94	0.09	20.7	0.04	32.36	6.47	1.45	2.38	0.04	0
15	36.61	0.1	20.66	0	32.45	6.6	1.38	2.28	0.02	0
16	36.83	0.16	20.45	0.01	25.73	8.94	1.08	6.18	0.02	0.01
17	36.67	0.08	20.5	0	25.64	9.13	1.06	5.97	0.02	0.01
18	41.53	0.08	18.04	0	22.86	8.36	0.91	5.48	0.04	0.01
19	36.94	0.1	20.37	0	25.28	9.19	1.06	6.13	0.02	0
20	36.74	0.11	20.26	0.03	25.78	9.22	1.06	6.04	0.01	0
21	36.22	0.01	20.79	0	35.5	3.48	1.6	2.12	0.02	0
22	36.64	0.08	20.68	0	34.58	3.65	1.57	2.35	0.07	0
23	36.18	0.07	20.38	0	34.47	3.65	1.53	2.31	0.03	0
24	36.37	0.08	20.53	0.01	34.12	4.39	1.66	2.23	0.01	0
25	36.32	0.01	20.64	0.03	35.72	3.64	1.38	1.92	0.01	0
26	37.371	0.015	21.295	0.023	33.485	0.96	4.441	3.509	0.065	0.004
27	37.065	0.063	21.513	0.015	32.937	0.954	4.112	3.758	0.053	0
28	37.038	0	21.701	0	33.083	0.998	4.114	3.721	0.005	0.006
29	36.25	0	21.317	0.034	32.855	0.957	4.169	3.721	0	0
30	36.471	0.016	21.724	0.018	32.854	0.954	4.092	3.658	0.013	0

Для начала взглянем на величину стандартных отклонений по каждому минералу [Рис.1]:

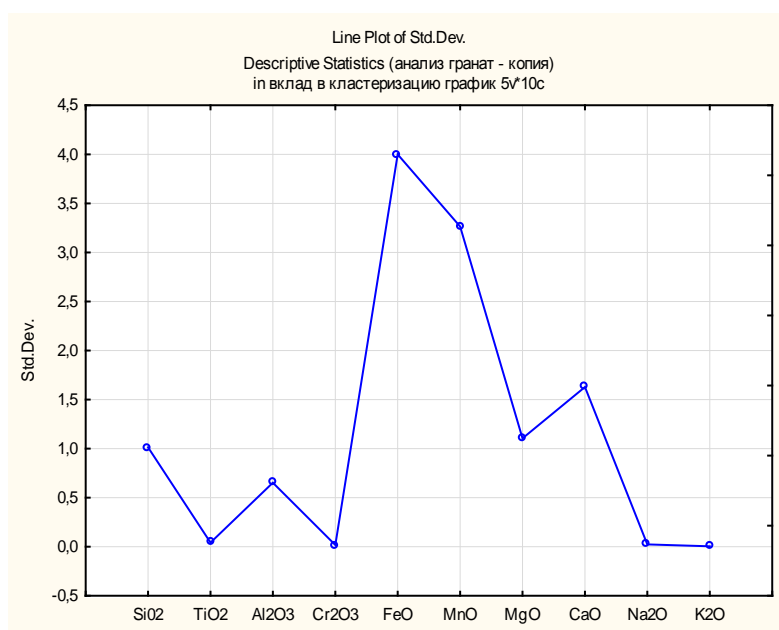


Рис.1.



Как видим, при использовании нынешних данных наиболее значимый вклад в кластеризацию будут вносить такие параметры как FeO, MnO, MgO, CaO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, SiO<sub>2</sub>. Чтобы этого не происходило, и все параметры имели одинаковый вес, проведем стандартизацию данных, которая позволяет устранить возможное влияние различий в составе совокупностей по какому-либо признаку на величину сравниваемых интенсивных показателей путем уравнивания этих составов и расчета стандартизованных коэффициентов.

Стандартизованные данные[Таб.2]:

Таблица 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	SiO2	TiO2	Al2O3	Cr2O3	FeO	MnO	MgO	CaO	Na2O	K2O
1	-0,1146653	0,68399717	-0,5798765	0,2949703	-1,3879613	1,26109667	-0,7058881	1,16828506	-1,2043007	-0,5684201
2	-0,0159577	0,44704665	-0,3346424	-0,8111683	-1,2479433	1,12934643	-0,6515612	1,25427418	0,03299454	-0,5684201
3	1,64232907	1,39484874	-1,0243633	-0,8111683	-1,5479824	1,07419508	-0,5610162	1,3709737	-0,3794372	1,86766604
4	-0,3811756	-0,0268544	-0,1660439	-0,8111683	-1,2554443	1,50315001	-0,6062887	0,38824088	0,85785804	-0,5684201
5	-0,3318219	1,15769822	-0,0280997	-0,258099	-1,2904493	1,05887526	-0,316545	1,3402633	0,85785804	1,86766604
6	-0,2627266	-0,737706	0,24778863	-0,258099	0,3672639	0,17338971	-0,2622181	-0,9384484	-0,3794372	1,86766604
7	1,10930831	-0,9746565	-0,9630548	1,95417823	0,53228512	0,07840663	-0,1968366	-0,9630167	1,68272154	-0,5684201
8	-0,4502709	-0,5007554	0,18648011	-0,8111683	0,51228255	0,12130233	-0,334654	-0,9015559	-1,2043007	-0,5684201
9	0,3022056	0,9209477	0,18648011	1,95417823	0,42227097	0,15500593	-0,2893815	-0,8463172	-1,2043007	-0,5684201
10	-0,7957473	1,39484874	-0,1047354	2,50724754	0,32725875	0,13662215	-0,3708719	-0,8708655	-1,2043007	-0,5684201
11	-0,2725973	0,44704665	0,06386305	-0,8111683	0,0422221	0,657456	-0,4433079	-0,8524593	0,85785804	-0,5684201
12	-0,124536	-0,2638049	0,12517158	0,84803961	0,06222467	0,60847258	-0,3437085	-0,9323063	1,27028979	-0,5684201
13	-0,3713049	-0,5007554	-0,0894083	-0,8111683	0,13723432	0,45816988	-0,4161444	-0,9138801	2,09515329	-0,5684201
14	0,03339605	0,44704665	0,18648011	1,40110892	0,55478801	0,01712756	-0,316545	-0,7419019	0,44542629	-0,5684201
15	-0,2923369	0,68399717	0,12517158	-0,8111683	0,57729091	0,05696909	-0,3759264	-0,8033227	-0,3794372	-0,5684201
16	-0,0751822	2,10570031	-0,1966982	-0,258099	-1,1029252	0,77392662	-0,6515612	1,59208659	-0,3794372	1,86766604
17	-0,2331143	0,21009613	-0,1200625	-0,8111683	-1,1254281	0,83214193	-0,6656701	1,46310491	-0,3794372	1,86766604
18	4,56407245	0,21009613	-3,890537	-0,8111683	-1,8205175	0,55621672	-0,8054875	1,16214298	0,44542629	1,86766604
19	0,03339605	0,68399717	-0,3193153	-0,8111683	-1,2154395	0,85052572	-0,6656701	1,56137819	-0,3794372	-0,5684201
20	-0,164019	0,9209477	-0,4879137	0,84803961	-1,0904235	0,85971761	-0,6656701	1,50609547	-0,791869	-0,5684201
21	-0,6772963	-1,4465575	0,32442429	-0,8111683	1,33988893	-0,8989976	-0,1807276	-0,9015559	-0,3794372	-0,5684201
22	-0,3614341	0,21009613	0,00255452	-0,8111683	1,1098594	-0,8775459	-0,2078911	-0,7603281	1,68272154	-0,5684201
23	-0,7167813	-0,0268544	-0,3039881	-0,8111683	1,08235585	-0,8469102	-0,2441091	-0,7848564	0,3299454	-0,5684201
24	-0,529237	0,21009613	-0,0740811	-0,258099	0,99484461	-0,6201769	-0,1264007	-0,8340331	-0,791869	-0,5684201
25	-0,5785907	-1,4465575	0,09451731	0,84803961	1,39489605	-0,8499742	-0,3759264	-1,0244375	-0,791869	-0,5684201
26	0,45882558	-1,3300823	1,09844446	0,46089109	0,83607419	-1,6711165	2,39165317	-0,048461	1,47650566	0,40601436
27	0,15678049	-0,1927198	1,43257594	0,01843564	0,69905657	-1,6729549	2,09376043	0,10447678	0,98158756	-0,5684201
28	0,13012945	-1,685508	1,72072602	-0,8111683	0,73556125	-1,6594734	2,09557133	0,08175109	-0,9980848	0,89323159
29	-0,647666	-1,685508	1,13216415	1,06926733	0,67855393	-1,6720357	2,14537103	0,08175109	-1,2043007	-0,5684201
30	-0,4295423	-1,3063872	1,75597843	0,18435644	0,6783033	-1,6729549	2,07565145	0,04305598	-0,6681394	-0,5684201

Далее произведем иерархическую кластеризацию методом Варда, в качестве меры расстояния между кластерами примем евклидово расстояние. Результатом данной операции будет следующая дендрограмма[Рис.2]:



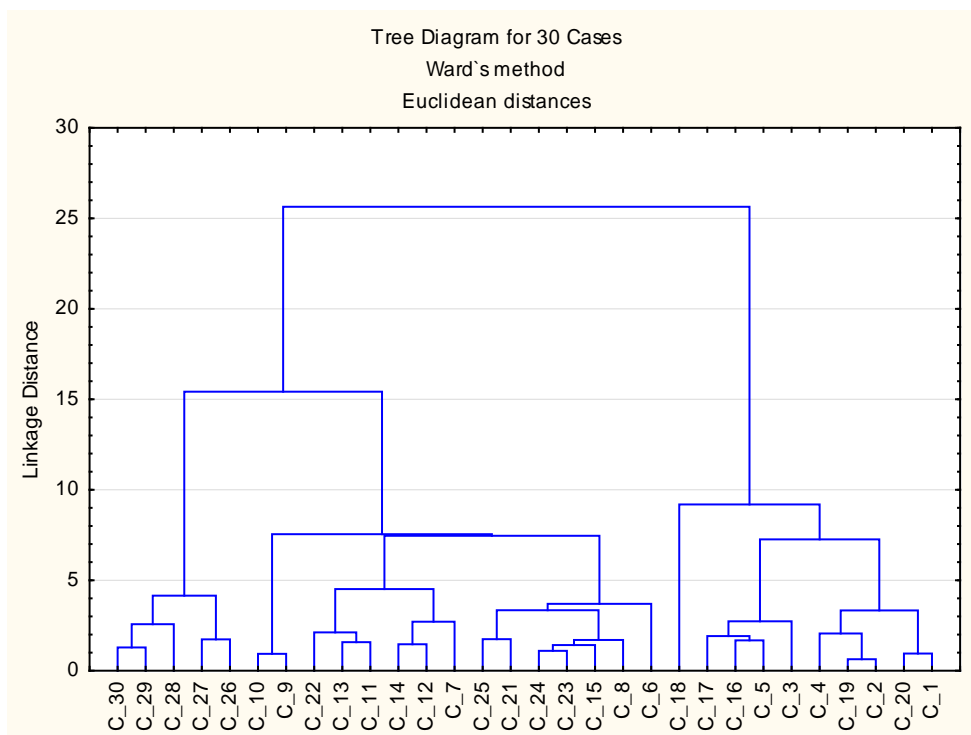


Рис.2.

Анализируя диаграмму, целесообразно выделить три кластера.

Далее произведем неиерархическую кластеризацию методом k-средних с выделением трёх кластеров. Результат представлен на графике [Рис.3]:

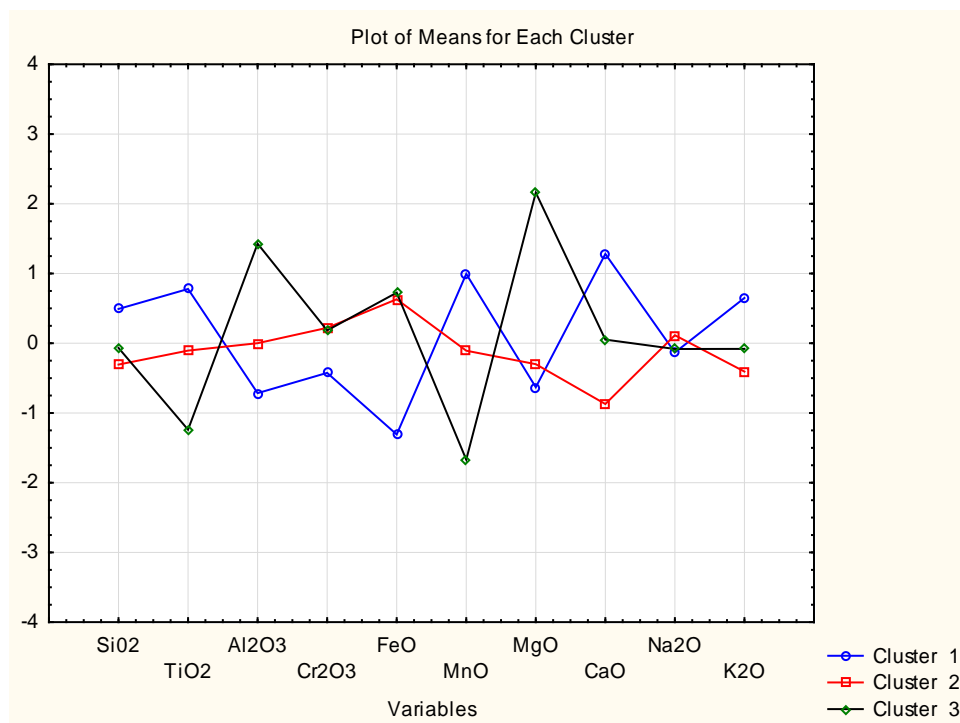


Рис.3.

Как видим, первый кластер выделяется большим содержанием  $MnO$  и  $CaO$ , а также низким содержанием  $FeO$ , второй кластер по содержанию некоторых элементов не значительно отличается от двух других, но всё же характеризуется низким



содержанием СаО, а третий кластер выделяется большим содержанием Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и MgO, а также низким содержанием MnO.

Проведенное нами исследование позволяет рекомендовать использование кластерного анализа для определения изохимической зональности и прогрессивности метаморфических реакций.

#### Список литературы

1. Авченко О.В. Петрогенетическая информативность гранатов метаморфических пород. М.: Наука, 1982. – 104 с.
2. Сизых А.И., Буланов В.А. Кристаллохимизм породообразующих минералов: Учеб. пос. – Иркутск: Иркут. Ун-т, 2005. – 218 с.
3. Сильянов С.А. Химическая неоднородность гранатов – показатель условий их образования: [Электронный ресурс]. Молодёжь и наука, 2014. URL: [http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d03/s15/s15\\_010.pdf](http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d03/s15/s15_010.pdf)
4. Князь Д.В. Методы кластеризации многомерных статистических данных: [Электронный ресурс]. Молодёжь и наука, 2014. URL: [http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d02/s13/s13\\_007.pdf](http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d02/s13/s13_007.pdf)
5. Тимофеева Е. А. Химическая и минеральная зональности в гранате из экологитамаксютовского комплекса / Е.А. Тимофеева. – Режим доступа: [http://www.anrb.ru/OLD/geol/PAPERS/K2008/03\\_054\\_08.pdf](http://www.anrb.ru/OLD/geol/PAPERS/K2008/03_054_08.pdf)

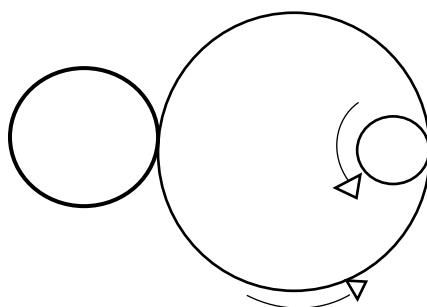


**ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ДВУХЪЯРУСНОЙ ЦИКЛОИДЫ****Дурнопьянов А.В.,****научный руководитель канд. физ.-мат. наук Семушева А.Ю***Сибирский федеральный университет*

Циклоидой называется траектория точки окружности, катящейся по прямой без проскальзывания.

Двухъярусной циклоидой называется траектория точки окружности, катящейся по другой окружности, которая, в свою очередь, катится по третьей, неподвижной окружности или прямой. Расположение окружностей может быть самым разнообразным.

Рассмотрим двухъярусную циклоиду



Представим, что  $R_1$  – радиус неподвижной окружности,  $R_2$  – радиус второй (катящейся по ней) окружности,  $R_3$  – радиус третьей окружности. Угловые скорости второй окружности относительно первой и третьей относительно второй обозначим через  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

Совместим начало координат с центром неподвижной окружности и допустим, что в исходном положении (в начальный момент времени  $t=0$ ) центры  $C_0$  и  $D_0$  подвижных окружностей. А также точка третьей окружности  $M_0$ , совпадает с точкой  $A_0$  второй окружности.

Чтобы определить, где окажется точка  $M_0$  через время  $t$ , применим принцип независимости движений. Согласно этому принципу одновременное движение двух окружностей можно заменить двумя последовательными движениями. Сначала катим только вторую окружность до положения с центром  $C$ , считая третью окружность как бы приклеенной в точке  $A_0 = M_0$ . После этого поворота точка  $B_0$  окажется в положении  $B$ , точка  $A_0$  – в положении  $A$ , а третья окружность – в положении с центром  $D'$ . Затем (в течение такого же времени  $t$ ) третью окружность прокатываем из положения с центром  $D'$  в положение с центром  $D$ . При этом точка  $A = M_0$  окажется в положении  $M$ .

Так как окружности поворачивались без проскальзывания, дуга  $B_0P$  первой окружности с углом  $\delta$  равна дуге  $BP$  второй окружности с центральным углом  $\tau$ ; аналогично дуга  $AK$  второй окружности с центральным углом  $\delta$  равна дуге  $MK$  третьей окружности с центральным углом  $\varphi$ . Длина дуги равна произведению центрального угла на радиус. Поэтому получаем следующие равенства:

$$R_1 \delta = R_2 \tau,$$

$$R_2 \delta = R_3 \varphi.$$

Так как окружности катятся с постоянными скоростями  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , мы получаем  $\tau = \omega_2 t$ ,  $\varphi = \omega_3 t$ . Подставляя эти выражения в предыдущие равенства, находим



$$\delta = \frac{R_1}{R_2} \omega_2 t,$$

$$\theta = \frac{R_3}{R_2} \omega_3 t.$$

Рассмотрим точку М – текущую точку искомой траектории. Её радиус-вектор можно представить в виде суммы трёх векторов:  $OM = OC + CD + DM$ .

Найдём координаты каждого из этих векторов:

$$X_{OC} = (R_1 + R_2) \cos \delta, \quad y_{OC} = (R_1 + R_2) \sin \delta.$$

Обозначим через  $\alpha$  угол между вектором CD и осью Ox. Из треугольника OCE получаем

$$\delta = \alpha + (\theta - \tau). \text{ Отсюда } \alpha = \delta - \theta + \tau.$$

$$\text{Таким образом получаем } \frac{R_2}{R_1} \omega_2 t - \frac{R_3}{R_2} \omega_3 t + \omega_2 t.$$

$$\text{Аналогично для CD получаем: } X_{CD} = (R_2 - R_3) \cos \alpha, \quad y_{CD} = (R_2 - R_3) \sin \alpha.$$

Осталось найти координаты вектора DM.

$$\text{Обозначим угол между вектором DM и осью x через } \beta, \quad \beta = 2\theta - \alpha - \varphi,$$

Исходя из того, что  $X_{DM} = R_3 \cos \beta$  заменяем  $\beta$  и получаем  $R_3 \cos(2\pi - \alpha - \varphi) = R_3 \cos(\alpha + \varphi)$   
Такие же действия проводим и с координатой  $y_{DM}$ :

$$Y_{DM} = R_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -R_3 \sin \beta = -R_3 \sin(2\pi - \alpha - \varphi) = R_3 \sin(\alpha + \varphi).$$

Подставляем всё в равенство  $OM = OC + CD + DM$

$$X_{OM} = X_{OC} + X_{CD} + X_{DM} = (R_1 + R_2) \cos \delta + (R_2 - R_3) \cos \alpha + R_3 \cos(\alpha + \varphi),$$

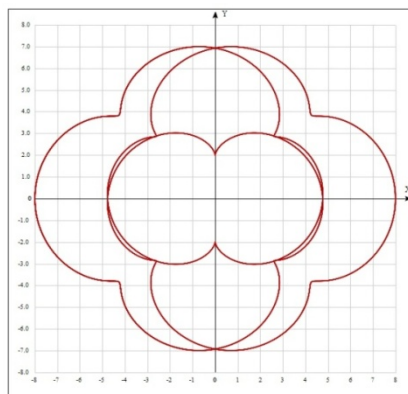
$$Y_{OM} = Y_{OC} + Y_{CD} + Y_{DM} = (R_1 + R_2) \sin \delta + (R_2 - R_3) \sin \alpha + R_3 \sin(\alpha + \varphi).$$

Заменяем  $\alpha$   $\delta$   $\varphi$  и получаем координаты вектора OM

$$X = (R_1 + R_2) \cos \frac{R_2}{R_1} \omega_2 t + (R_2 - R_3) \cos \left( \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \omega_2 t - \frac{R_3}{R_2} \omega_3 t \right) + R_3 \cos \left( \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \omega_2 t - \left( \frac{R_3}{R_2} - 1 \right) \omega_3 t \right)$$

$$Y = (R_1 + R_2) \sin \frac{R_2}{R_1} \omega_2 t + (R_2 - R_3) \sin \left( \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \omega_2 t - \frac{R_3}{R_2} \omega_3 t \right) + R_3 \sin \left( \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \omega_2 t - \left( \frac{R_3}{R_2} - 1 \right) \omega_3 t \right)$$

Положим в этих уравнениях  $R_1 = 3, R_2 = 1, R_3 = 1, \omega_2 = \frac{1}{6} \omega_3$ . Тогда график циклоиды будет выглядеть так:



## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ПРИМЕРЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Дыба А. Р., Москвин И. В.

научный руководитель: ст. преподаватель Арасланова М.Н.

*Сибирский федеральный университет*

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути, занимаются математическим моделированием: заменяют объект исследования его математической моделью и затем изучают последнюю.

Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования.

Математическая модель определяется как объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала, как «эквивалент объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям», как систему уравнений, или арифметических соотношений, или геометрических фигур, или комбинацию того и другого.

В нашем исследовании мы построили математическую модель химического процесса на примере определения скорости химической реакции. А для этого построения необходимо изучить *химическую кинетику* – раздел химии, в котором изучаются скорости и механизмы химических реакций.

Скорость любой химической реакции зависит от следующих факторов:

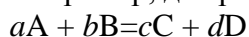
1) природа реагирующих веществ; 2) концентрация реагирующих веществ; 3) температура; 4) присутствие катализаторов.

Влияние природы реагирующих веществ на скорость реакции выражается в том, что при одних и тех же условиях различные вещества взаимодействуют друг с другом с разной скоростью. Например, при обычных условиях реакция между соляной кислотой HCl и раствором гидроксида натрия NaOH протекает практически мгновенно, а реакция между водородом H<sub>2</sub> и бромом Br<sub>2</sub> – медленно.

Количественно зависимость скорости реакции от концентрации реагирующих веществ выражается законом действующих масс (Гульдберг и Вааге, Норвегия, 1867 г.), который гласит: *скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ.*

Для простейших одностадийных реакций концентрации веществ берутся в степенях, которые равны коэффициентам перед формулами веществ в уравнении реакции.

Например, для реакции



(где  $a, b, c, d$  – коэффициенты перед формулами веществ A, B, C, D) скорость реакции в соответствии с законом действующих масс равна:

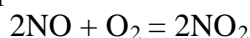
$$V = k [A]^a [B]^b,$$

где [A] и [B] – концентрация исходных веществ;  $k$  – константа скорости реакции, которая равна скорости реакции при концентрациях реагирующих веществ [A]=[B]=1 моль/л. Константа скорости реакции зависит от природы реагирующих веществ, температуры, но не зависит от концентрации веществ.



**ЗАДАЧА.** Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Требуется найти концентрацию кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

В условиях практической необратимости химическая реакция веществ описывается уравнением:



Найдем концентрацию кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота (NO) окисляется с наибольшей скоростью.

Концентрация газов выражается формулой:

$$y = kx^2(100 - x),$$

где  $x$  – концентрация NO в любой момент времени, в %,

$(100 - x)$  – концентрация  $\text{O}_2$ , в %

$k$  – коэффициент реакции ( в условиях данной задачи скорость не будет зависеть от концентрации реагирующих компонентов, а зависит только от температуры.)

Используем математический алгоритм исследования функции на экстремум, основанный на необходимом и достаточном условии его существования:

1. находим первую производную функции,
2. приравниваем производную функции к нулю,
3. находим значения переменных, при которых производная равна нулю,
4. разбиваем этими значениями координатную прямую на промежутки (при этом ещё надо не забыть о точках разрыва, которые также надо наносить на прямую),
5. вычислить на каких из этих промежутков производная будет положительной, а на каких – отрицательной,
6. если при переходе через какую-то точку знак производной меняется с плюса на минус, то эта точка будет максимумом, а если с минуса на плюс, то – минимумом.

Для этого вычисляем первую производную данной функции:

$$y' = (k(100x^2 - x^3))' = k(200x - 3x^2).$$

Определяем критические точки, приравняв к нулю производную

$$200x - 3x^2 = 0, \quad x(200 - 3x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{200}{3} \approx 66,7.$$

Равенство нулю концентрации окиси азота не имеет смысла, поэтому рассмотрим значение  $x_2$ . при переходе через точку производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это максимум. При этом концентрация кислорода

$$100 - x = 100 - 66,7 = 33,3.$$

Концентрация кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота, окисляется с наибольшей скоростью равна 33,3 %.

При выполнении данного исследования был приобретен опыт в построении математической модели химического процесса, выявлена интегративная связь математики и химии. Помимо этого проведен сбор материала по разделам химии «Вещества и их агрегатные состояния», «Получение и применение окиси азота и кислорода», «Концентрация вещества», «Химическая реакция».

### Список литературы

1. Баврин И.И. Высшая математика. М.: Академия, 1997, 610с.
2. Кнунянц И. Л. и др. Химическая энциклопедия. — Москва: Советская энциклопедия, 1990. — Т. 2. — С. 387-389. — 671 с.
3. Репетитор по химии/ под ред. А.С. Егорова. – Изд. 37-е. – Ростов н/Д : Феникс, 2012. – 762.



## КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Мазуров Н.А., Лю-фа Е.Е.

научный руководитель ст. преподаватель Арасланова М.Н.

*Сибирский федеральный университет*

При всех изменениях в электрической цепи: включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра и т.п., называемых *коммутациями*, в ней возникают переходные процессы.

Переходным процессом называется переход от одного режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего, которые не могут протекать мгновенно, так как невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи. Общий подход к расчету переходных процессов в любой электрической цепи заключается в составлении дифференциальных уравнений, решение которых может проводиться различными методами:

1) *классическим*, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи,

2) *операторным*, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам,

3) *частотным*, основанный на преобразовании Фурье и находящий широкое применение при решении задач синтеза,

4) *методом расчета с помощью интеграла Дюамеля*, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия,

5) *методом переменных состояния*, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши).

При любых переходных процессах соблюдают два основных положения: ток через индуктивность и напряжение на емкости не могут изменяться скачком. Отсюда следуют два закона коммутации:

1 (закон сохранения потокосцепления). Ток через индуктивность непосредственно до коммутации  $i_L(0-)$  равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации  $i_L(0+)$ :  $i_L(0+) = i_L(0-) = i_L(0)$ .

2 (закон сохранения заряда). Напряжение на емкости непосредственно до коммутации  $u_C(0-)$  равно напряжению на емкости непосредственно после коммутации  $u_C(0+)$ :  $u_C(0+) = u_C(0-) = u_C(0)$ .

При расчете переходного процесса в электрической цепи, прежде всего, нужно выявить значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, предшествующий коммутации в цепи  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$  — начальные условия переходного процесса. Если все значения  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$  равны нулю, то токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. Для определения знаков при ненулевых начальных условиях  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$  необходимо определить направления обхода контуров цепи, в которых происходит переходный процесс.



В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой соотношениями, приведенными в табл. 1.

Таблица 1.

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$u_r = r i_r$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$
		$i_C = C \frac{du_C}{dt}$
	При наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током $i_M$	
	$u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$	

Для последовательной цепи, содержащей линейные резистор  $r$ , катушку индуктивности  $L$  и конденсатор  $C$ , при ее подключении к источнику с напряжением  $u$ :

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt .$$

Подставив значение тока через конденсатор, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно  $u_C$ :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = u .$$

В общем случае уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с  $n$  независимыми накопителями энергии, имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) ,$$

где  $x$  – искомая функция времени (напряжение, ток, потокосцепление и т.п.);  $f(t)$  – известное возмущающее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии);

$a_k$  –  $k$ -й постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Сущность **операторного метода**, заключается в том, что функции времени  $f(t)$  которую называют оригиналом, ставится в соответствие функция  $F(p)$ , которую называют изображением. Новая переменная  $p = s + i\omega$  является комплексной.

Изображение  $F(p)$  заданной функции  $f(t)$  определяется в соответствии с прямым преобразованием Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt .$$

В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор  $p$ , а интегрирование – делением на него), что опреде-



ляет переход от систем интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций.

В общем случае при использовании данного метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для изображений напряжений и токов, приведенными в табл. 2.

Таблица 2.

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$U_r = rI(p)$	$U_L = LpI(p) - Li(0)$	$U_C = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$

Пусть в электрической цепи рис. 1 ключ  $P$  переходит из положения 1 в положение 2, в этом случае возникнет переходный процесс. Допустим, что начальные условия переходного процесса ненулевые  $i_L(0) \neq 0$  и  $u_C(0) \neq 0$ . Следовательно, при заданном направлении тока в индуктивности и напряжении на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, значения положительны.

По второму закону Кирхгофа:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + u_C(0) = e,$$

$e = E(p)$  — изображение внешней э.д.с., действующей в контуре;

$i = I(p)$  — изображение тока переходного процесса в контуре.

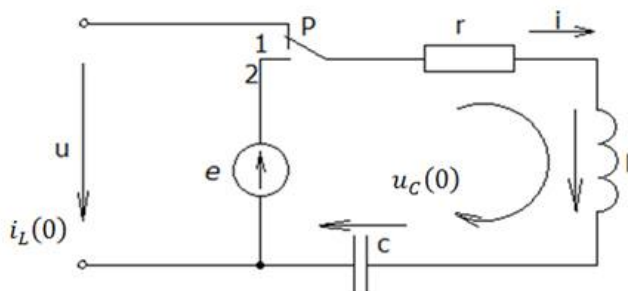


Рис.1

В этом случае уравнение цепи в операторной форме примет вид:

$$rI(p) + L(pI(p) - i_L(0)) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Данное уравнение можно записать как:

$$\left( r + Lp + \frac{1}{pC} \right) I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Далее находим выражение изображения тока переходного процесса:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{r + Lp + \frac{1}{pC}}.$$

Это уравнение является законом Ома в операторной форме:

$$I(p) = \frac{F(p)}{Z(p)},$$

где:  $F(p)$  — это изображение всех (внешних и дополнительных) э.д.с., действующих в контуре;

$Z(p)$  — операторное сопротивление контура;



$\frac{u_C(0)}{p}$  — изображение начальной э.д.с. емкости, которая направлена навстречу

$u_C(0)$  и уравнивает начальное напряжение на обкладках конденсатора.

Благодаря Закону Ома в операторной форме можно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. Исследуя переходные процессы в сложных или разветвленных электрических цепях нужно применять первый и второй законы Кирхгофа, которые в операторной форме можно записать так:

Первый закон	$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$
Второй закон	$\sum_{k=1}^m Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^l E_k(p)$

При составлении уравнения по второму закону Кирхгофа, нужно принимать во внимание то, что кроме внешних э.д.с. в контурах, которые содержат индуктивности и емкости не равные нулю, действуют также внутренние э.д.с. (начальные э.д.с.: емкости и самоиндукции).

В операторной форме законы Ома и Кирхгофа записываются так же, как и в цепях переменного и постоянного тока с постоянными режимами. Именно поэтому, при применении операционного исчисления в расчетах переходных процессов, можно использовать любые методы вычисления сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами (метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов, метод наложения).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется последовательность действий:

1. нахождение начальных условий из расчета установившегося режима до коммутации,
2. составление послекоммутационной операторной схемы замещения цепи,
3. запись для операторной схемы замещения уравнений по законам Кирхгофа или другим методом расчета линейных цепей в операторной форме,
4. решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин,
5. переход от найденных изображений к функциям времени (с помощью теоремы разложения или таблиц соответствия).

Классическим и операторным методами была решена стандартная задача.

В электрической цепи (коммутируемой цепочке) с элементами  $U$ ,  $R$ ,  $L$ , в некоторый момент времени  $t=0$  ключ замыкается. Определить зависимость тока от времени.

Согласно второму закону Кирхгофа, схема описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$U = iR + L \frac{di}{dt},$$

которое решаем методом замены переменных. Затем находим частное решение при начальных условиях  $i(0)=0$ :

$$i = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

При решении операторным методом заменяем все слагаемые изображениями и выражаем изображение тока:



$$I = \frac{U}{p(R + pL)}.$$

Используя теорему разложения и таблицу оригиналов, находим оригиналы слагаемых. Ответ совпадает с предыдущим методом.

### Список литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. — 7-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 2008. — 528 с.
2. Основы теории цепей: Учеб. для вузов /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. -528с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. –М.: Наука, 1981. – 302 с.





## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧИМЫХ РАЗЛИЧИЙ В СФОРМИРОВАННОСТИ КОМАНДНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ РАЗНЫХ КУРСОВ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Осипов М.В.

научный руководитель канд. физ-мат. наук Осипов В.В.

*Сибирский Федеральный университет*

Педагогическое исследование имеет теоретико-экспериментальный характер, в котором сочетаются две части. Первая часть касается изучения информационных источников для определения степени разработанности проблемы, аналитико-синтетическая обработка которых позволяет определить дефицит научных знаний по проблеме исследования и выдвинуть гипотезу. Вторая часть педагогических исследований представляет собой опытно-экспериментальную деятельность исследователя, главная задача которой состоит в подтверждении выдвинутой гипотезы.

В педагогической науке определены требования к проведению опытно-экспериментальной работы, такие как репрезентативность выборки и воспроизводимость результатов эксперимента. Однако, важнейшей составляющей опытно-экспериментальной работы для подтверждения выдвинутой гипотезы является сбор и обработка экспериментальных данных, характеризующих процесс формирования исследуемого феномена.

Для конкретизации темы исследования обсудим задачу оценки достоверности значимых различий уровней сформированности командной компетентности студентов разных курсов, названной нами важной составляющей конкурентоспособного выпускника высшей школы [1].

Задача имеет модельный характер, однако показывает возможности использования методов математической статистики в обработке данных педагогического эксперимента.

Выбор исследования названной компетентности определяется рядом причин, обуславливающих актуальность её формирования в образовательном процессе вуза. Во-первых, наукоемкие задачи современного производства требуют их решения на интеграции знати профессионалов разных областей знаний, что возможно только в командных рядах. Во-вторых, ФГОС ВО актуализируют проблему формирования общекультурных компетенций, в том числе и компетенции в командной работе. Однако, ряд исследователей, изучающих современных студентов, относят их к цифровому поколению, отмечают их индивидуализм.

Сказанное определяет актуальность проблемы поиска условий формирования командной компетентности студентов в образовательном процессе вуза. Данная работа рассматривает лишь часть этой проблемы целью которой является определение компетентности или её отсутствия у студентов разных курсов. Гипотетически предполагаем, что организация и содержание образовательной деятельности в ВУЗе способствует формированию командной компетентности.

*Объект исследования:* личностные характеристики студента.

*Предмет исследования:* сформированность командной компетентности как личностной характеристики у современного студента.

*Методы исследования:* анализ психолого-педагогической литературы; анкетирование, наблюдение, математическая обработка экспериментальных данных (критерий Крамера-Уэлча).

*Задачи исследования*



1. Выбрать экспериментальные группы и диагностический аппарат для определения степени сформированности командной компетентности.

2. Провести анкетирование.

3. Обосновать выбор статистического метода для обработки результатов анкетирования с целью установления значимых различий в экспериментальных группах.

4. Провести обработку экспериментальных данных методами математической статистики. Сделать выводы о результативности образовательного процесса в контексте формирования командной компетентности.

В данном исследовании в качестве экспериментальных групп выступили студенты 1-го и 3-го курсов направления подготовки «Профессиональное обучение (информатика и вычислительная техника)». Объем выборки в экспериментальных группах был соответственно 17 и 16 человек. В качестве диагностической анкеты для определения компетентности студентов к работе в команде использовалась анкета «Оценка отношений подростка с классом» [2]. В соответствии с инструкцией к анкете измерения проводились в шкале отношений  $\{x_i\}$  и  $\{y_j\}$  – являлись положительными, натуральными целыми числами, для которых имеют смысл все арифметические операции [3]. Результаты проведенного анкетирования по признакам «индивидуалистический» (И) «коллективистский» (К) типы обработаны в компьютерной программе Microsoft Excel для Windows «Описательная статистика» (Сервис / Анализ данных / Описательная статистика).

Полагаясь на авторитетное мнение Д.А. Новикова о целесообразном выборе критерия для проверки гипотезы о совпадении характеристик групп, измеренных в шкале отношений, в данном исследовании использован критерий Крамена-Уэлча. Эмпирическое значение данного критерия рассчитывается на основании информации об объемах  $N=17$  и  $M=16$  выборок, выборочных средних  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  и выборочных дисперсиях  $D_x$  и  $D_y$ :

$$T_{эмп.} = \frac{\sqrt{M \cdot N} |\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{M \cdot D_x + N \cdot D_y}}.$$

Значение  $T_{эмп.}$  можно считать вручную, однако, нами использован инструмент «описательная статистика» в компьютерной программе Microsoft Excel для Windows. Эмпирическое значение критерия Крамера-Уэлча  $T_{эмп.} = 1,99$ . Сравнивая это значение с критическим  $T_{0,05} = 1,96$ , заключаем, что  $T_{эмп.} > 1,96$ , следовательно, можно сделать вывод о достоверности различий характеристик выборок на уровне значимости 0,05.

Такой результат подтверждает выдвинутую гипотезу о том, что образовательный процесс с его формами групповой и коллективной работы способствует формированию командной компетентности студентов в процессе их профессионального образования

### Список литературы

1. Осипов М.В. Способность к командной деятельности в структуре конкурентоспособности выпускника вуза. Труды Всероссийской конференции «Молодежь и наука», Красноярск, 2013.

2. Рогов Е.И. Настольная книга практического психолога. Учебное пособие: в 2 кн. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Гуманит изд. центр ВЛАДОС, 1999.

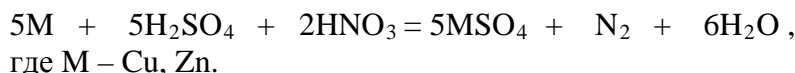


## ИЗУЧЕНИЕ КИНЕТИКИ РАСТВОРЕНИЯ ЛАТУНИ В РАСТВОРЕ СЕРНОЙ И АЗОТНОЙ КИСЛОТ

Пластикова П.М., Маслова Н.В.,  
научные руководители канд. техн. наук Вострикова Н.М.,  
доцент Братухина Н.А.  
Сибирский федеральный университет

В связи с истощением рудных ресурсов и повышением стоимости энергии все более актуальным становится использование в промышленном производстве вторичных металлов. Для производства цветных металлов из вторичного сырья перспективны гидрометаллургические и электрохимические процессы, обеспечивающие комплексное извлечение цветных, благородных и редких металлов, низкие капитальные затраты и возможность работы при малом и резко изменяющемся объеме производства. Вторичная переработка металлов, как следствие улучшает экологическую обстановку на планете. Поэтому представляло интерес изучить условия гидрометаллургического процесса растворения латуни в растворе кислот. С этой целью необходимо изучить кинетику этого процесса.

Используя аппарат математической статистики и теории планирования эксперимента, был составлен план активного эксперимента изучения процесса растворения латуни в растворе серной кислоты, в присутствии азотной кислоты. Растворение латуни отражает уравнение реакции:



В качестве зависимой переменной выбрали скорость растворения латуни, которая зависит от выбранных факторов. В качестве факторов были выбраны только контролируемые и управляемые переменные, т.е. такие, которые можно поддерживать постоянными в течение каждого эксперимента на заданном уровне. В число факторов были включены температура  $t$ , концентрация  $C$  и продолжительность опытов  $\tau$ , оказывающие наиболее сильное влияние на зависимую переменную.

Необходимо заметить, что, несмотря на всю заманчивость и очевидные преимущества активного спланированного эксперимента перед пассивным, в его применении имеется целый ряд трудностей, связанных с определенными ограничениями на его реализацию. Важнейшим условием применимости этого подхода является управляемость процессов по каждому из выбранных факторов, т.е. возможность независимого изменения каждого из этих факторов и поддержания его на заданном уровне в период проведения экспериментов.

Уравнение регрессии в этом случае, с учетом вышеизложенного, имеет вид

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \beta_{123} x_1 x_2 x_3.$$

где  $\beta_0, \beta_1$  коэффициенты модели,  $x_1, x_2, x_3$  – значение задаваемых факторов.

Для каждого фактора указывали тот интервал изменения параметров, в пределах которого ставился эксперимент. В нашем случае устанавливаются ориентировочные значения факторов  $t$  (25-80°C),  $C$  (50-100 г/л),  $\tau$  (20-60 мин). Этой комбинации значений факторов соответствует точка в многомерном факторном пространстве, которая принимается за исходную точку. Координаты этой точки принимаются за **основной (нуле-**



**вой) уровень**, его мы находим как среднее значение между верхним уровнем и нижним. Например, нулевой уровень (заданного фактора) = (max значение(t, C или τ) + min(t, C или τ))/2.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (каждое для соответствующего фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний пределы. Данный интервал находим как разность между верхним и нижним уровнем. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень составлял +1, нижний –1, а основной – 0.

Эти сведения, необходимы для постановки эксперимента и представлены в таблицу (табл.1).

Таблица 1. Значения факторов на каждом уровне

Наименование	T, C°	t, мин	C(H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ), г/л
Нулевой уровень	52,2	30	75
Интервал варьирования	55	40	50
Верхний уровень (+1)	80	60	100
Нижний уровень (-1)	25	20	50

В теории планирования экспериментов показано, что минимально необходимое число уровней факторов на единицу больше порядка уравнения. В нашем случае использовалось 3 фактора.

Заметим, что использовали все точки с "крайними" координатами, т.е. ±1, или говоря другими словами, все возможные комбинации выбранных уровней. В самом деле, всех возможных комбинаций  $2^k = 8$ , ( $k$  – число факторов) и мы все их использовали, представив план эксперимента в табл.2.

Таблица 2. Матрица полного факторного эксперимента для трех факторов

Номер опыта	План			Результат $v \cdot 10^{-3}, \text{ г/м}^2 \cdot \text{с}$
	T°, C	t, мин	C, г/л	
1	+1	+1	+1	4,188
2	-1	+1	+1	3,616
3	+1	-1	+1	1,060
4	-1	-1	+1	0,420
5	+1	+1	-1	2,970
6	-1	+1	-1	0,930
7	+1	-1	-1	1,929
8	-1	-1	-1	0,187

Решение задачи начинают с линейной зависимости. В случае, когда функция отклика линейно зависит от трех независимых факторов рассматривается линейная модель:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i \quad ,$$

Вычисление коэффициентов производилось по формулам:



$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{0j}}{n}; \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{1j}}{n}; \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{2j}}{n}; \quad b_3 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j x_{3j}}{n}.$$

где  $\beta_1$  = (значение корреляции\*среднее квадратичное отклонение скорости)/среднее квадратичное значение задаваемого фактора;  $\beta_0$  = среднее значение скорости +  $\beta_1 x$ ,  $x$  – значение задаваемого фактора.

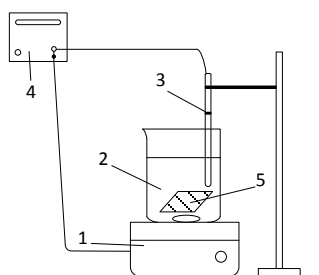
Обработка экспериментальных данных, полученных в ходе активного эксперимента, была проведена в MS Excel. Таким образом, полученная линейная модель имеет вид:

$$v = -0,05 + 0,011T + 0,00025\tau + 0,0082C$$

Полученное уравнение позволяет оценить зависимость между скоростью и выбранными факторами и предсказывать значения скорости при значениях факторов, которые не использовались в эксперименте.

После построения функции отклика была проведена статистическая проверка на адекватность уравнения, на адекватность полученных коэффициентов с помощью критериев Фишера и Стьюдента. Кроме множественной модели также была рассмотрена зависимость скорости растворения латуни от каждого фактора.

Растворению подвергали латунь марки Л-40, содержащую 60% Cu и 40% Zn в смеси кислот. В качестве реагентов использовали: серную кислоту марки «ХЧ» (пл. 1,835 г/см<sup>3</sup>) и азотную кислоту марки «ХЧ» (пл. 1,507 г/см<sup>3</sup>). Изучение растворения проводили термическим методом. В стеклянный стакан заливали раствор заданного состава, нагревали до заданной температуры, опускали пластинки из латуни и перемешивали раствор магнитной мешалкой (марки «MR Hei-Standard»), с постоянной скоростью 200 об/мин. По истечению заданного времени пластинки из латуни вынимали из раствора, промывали дистиллированной водой, просушивали в сушильном шкафу до постоянной массы и взвешивали на электронных лабораторных весах марки «ЕК-300».



1 – магнитная мешалка с подогревом; 2 – термостойкий стеклянный стакан; 3 – термометр; 4 – терморегулятор.

Рис.1. Экспериментальная установка процесса выщелачивания латуни

В ходе опытов контролировали убыль массы латуни в единицу времени и рассчитывали удельную скорость выщелачивания по формуле:

$$v = \frac{\Delta m}{2 \cdot S \cdot \Delta \tau},$$

где  $\Delta m$  – изменение массы исследуемого образца, г;  $S$  – площадь пластинки из латуни, м<sup>2</sup>;  $\Delta \tau$  – продолжительность опыта, с.

Для процесса растворения латуни в растворе серной кислоты, в присутствии 2 М азотной кислоты были установлены зависимости скорости растворения от концентрации серной кислоты, продолжительности опыта и температуры.

Используя дифференциальный метод Вант-Гоффа, прологарифмировав уравнение формальной кинетики были построены зависимости  $\ln v$  от  $\ln C$  для определения

порядок реакции (табл.3, рис.2), логарифма  $\ln v$  от  $10^3/T$ , для определения энергии активации процесса (табл.4, рис.3).

Таблица 3. Зависимость скорости растворения латуни от концентрации серной кислоты

$C_{H_2SO_4}$		Убыль массы, г	$v \cdot 10^{-2}$ , г/м <sup>2</sup> ·с	$\lg v$	$\lg C$
г/л	моль/л				
50	0,5	0,005	9,3	-5,032	-0,3
100	1	0,017	3,6	-4,44	0

Таблица – 4. Зависимость скорости растворения латуни от температуры  
 $C(H_2SO_4) = 100$  г/л,  $C(HNO_3) = 15,4$  г/л,  $\tau = 60$  мин

$T^\circ, C$	$1000/T$	Убыль массы, г	Скорость $\cdot 10^{-2}$ , г/м <sup>2</sup> ·с	$\lg v$
25	3,36	0,001	1,9	-5,72
40	3,19	0,002	3,8	-5,42
60	3	0,005	9,3	-5,031
80	2,83	0,009	19,1	-4,72

Так, как экспериментальные точки легли на прямую линию (рис.2), порядок реакции равен 1.

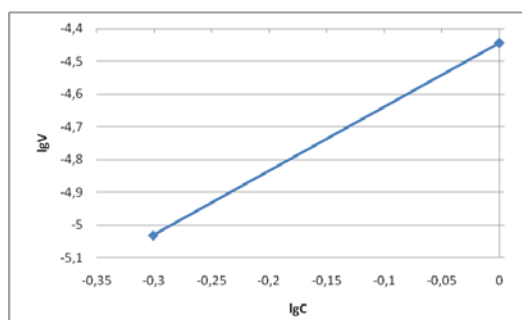


Рис.2. Зависимость  $\ln v$  от  $\ln C$

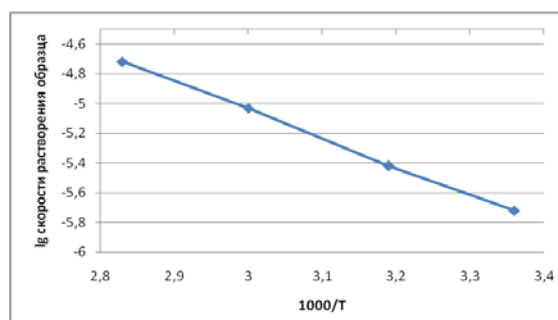


Рис.3. Зависимость логарифма  $\ln v$  от  $10^3/T$

По тангенсу угла наклона прямой линии к оси абсцисса вычисляется энергия активации процесса:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{E_a}{2,3R}$$

$$E_a = -19,123 \operatorname{tg} \alpha = -19,123 \cdot (-1,05/0,54) = 37,1 \text{ Дж/моль.}$$

Расчет энергии активации показал, что процесс растворения латуни в серной кислоте в присутствии 2М азотной кислоты протекает в режиме близком к диффузионному, в котором скорость реакции существенно зависит от концентрации реагентов.

Таким образом, полученные математические модели позволяют осуществить выбор условий для изучения химических процессов, протекающих в металлургической практике.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШИВАНИЯ РАДИАЛЬНЫХ ГАЗОВЫХ СТРУЙ С АКСИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ ГАЗОВЗВЕСИ В ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ СУШИЛКЕ

Селиверстов А.А.,

научный руководитель д-р техн. наук, проф. Загидуллин С.Х.

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Сушка хлорида калия (KCl) – основного вида калийных удобрений в нашей стране сопряжена с проблемой налипания материала на внутренние поверхности сушильных установок [1]. Для минимизации этой проблемы нами разработана новая конструкция пневматической сушилки [2, 3], в которой теплоноситель вводится в восходящий поток газозвеси в виде множества радиальных струй, которые оттесняют высушиваемые частицы от стенок пневмотрубы.

Для изучения влияния расположения отверстий для ввода струй на неоднородность образующейся смеси, степень нагрева частиц материала и интенсивность их контакта со стенками пневмотрубы было выполнено моделирование процесса смешивания неизотермических потоков в пневматической сушилке средствами вычислительной гидродинамики (CFD) в программе SolidWorks Flow Simulation.

Моделирование выполняли при следующих исходных данных:

- производительность сушилки по влажному материалу 400 кг/ч;
- материал – песок фракции  $(-0,4+0,2)$  мм с плотностью  $2638 \text{ кг/м}^3$ ;
- диаметр пневмотрубы на входе  $D_{\text{вх}} = 58$  мм, на выходе  $D_{\text{вых}} = 100$  мм;
- высота камеры смешивания 200 мм;
- расход и температура теплоносителя  $V = 369 \text{ м}^3/\text{ч}$ ,  $t_c = 730 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- расход и температура восходящего потока  $V_{\text{вх}} = 60,3 \text{ м}^3/\text{ч}$ ,  $t_{\text{п}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- равновесная температура смеси  $t_{\text{eq}} 500 \text{ }^\circ\text{C}$ .

«Живое» сечение газораспределителя (отношение суммарной площади отверстий камеры смешивания к площади поперечного сечения пневмотрубы на выходе) принималось равным 0,3. Таким образом, скорость струй, приведённая к суммарной площади отверстий  $v_c$ , составила 43,5 м/с.

В ходе вычислительного эксперимента моделировали несколько вариантов конструкций камер смешивания с различным числом и диаметром отверстий. Ниже приведены их условные обозначения в виде: (число отверстий по окружности  $\times$  число рядов отверстий  $\times$  диаметр отверстия в мм):

Ц-5 (5 $\times$ 9 $\times$ 8,2); Ц-7 (7 $\times$ 9 $\times$ 6,9); Ц-8 (8 $\times$ 9 $\times$ 6,4); Ц-10 (10 $\times$ 9 $\times$ 5,8); Ц-15 (15 $\times$ 9 $\times$ 4,7).

Сравнение результатов проводили по критерию неоднородности смеси по сечению пневмотрубы на заданном расстоянии от начала камеры смешивания:  $L/D_{\text{вых}} = 2; 2,6; 3,2$  и 4.

Для оценки степени перемешивания потока в некоторой произвольной точке пневмотрубы использовали безразмерную температуру [4]:

$$f = (t_{jk} - t_c) / (t_{\text{п}} - t_c),$$

где индексы  $j$  и  $k$  указывают на радиальную и окружную координаты точки, соответственно ( $j = 1 \dots 20$ ,  $k = 1 \dots 100$ ).

Величина  $f$  может принимать значения от 0 до 1, где 0 соответствует начальным параметрам струи, а 1 – параметрам восходящего потока.

Для верхней секции пневмотрубы, где процесс смешивания завершён, вычисляли значение безразмерной равновесной температуры:



$$f_{eq} = (t_{eq} - t_c) / (t_n - t_c) = 0,326.$$

Неоднородность смеси ( $U$ ) оценивали с помощью среднеквадратического отклонения безразмерной температуры по площади  $F$  пневмотрубы:

$$U = \sqrt{\frac{1}{F} \sum_{jk} F_{jk} \left( \frac{t_{jk} - t_{eq}}{t_n - t_c} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{F} \sum_{jk} F_{jk} (f - f_{eq})^2}.$$

Значение  $U = 0$  соответствует идеально однородной смеси, поэтому наиболее эффективной, с точки зрения перемешивания потоков, будет пневмотруба, обеспечивающая минимальное значением  $U$  в заданном сечении.

При смешивании аксиального потока с поперечными струями теплоносителя неоднородность образующейся смеси существенно зависит от числа отверстий по окружности камеры смешивания (см. рис. 1).

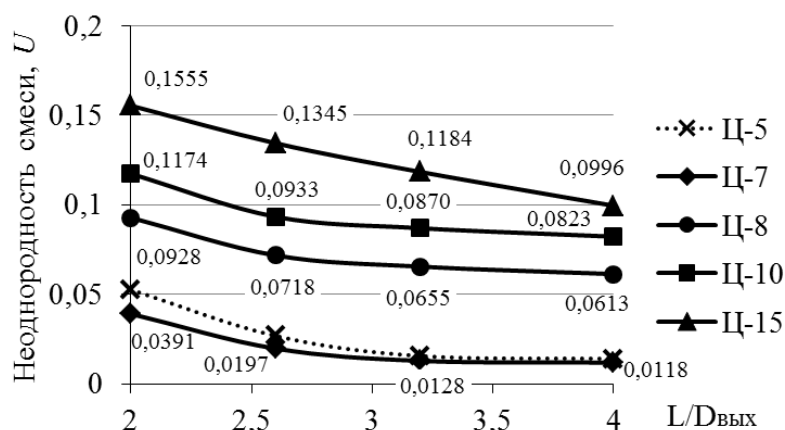


Рис. 1. Изменение неоднородности смеси в цилиндрической пневмотрубе

Наиболее однородная смесь при данных условиях получена в камере смешивания с числом отверстий по окружности, равным 7. Это значение хорошо согласуется с оптимальным числом отверстий  $n$  при круговом однорядном их расположении [4, 5]:

$$n = 0,4\pi\sqrt{2J}, \quad (1)$$

где  $J$  – отношение скоростных напоров радиальных струй и восходящего потока.

Значение  $n$  в формуле (1) соответствует такой глубине проникновения ряда радиальных струй в поперечный поток, при которой достигается наименьшая неоднородность смеси. Расчёт по формуле (1) даёт значение  $n = 6,7$ . С увеличением числа отверстий окружное расстояние между ними уменьшается, что вызывает преждевременное слияние струй и уменьшение глубины их проникновения в аксиальный поток. В результате эффективность смешивания снижается.

Контурные эпюры температур представлены на рис. 2. Их сопоставление с данными рис. 1 показывает, что если неоднородность смеси ( $U$ ) превышает 0,05, то в осевой области потока наблюдается некоторое уменьшение температуры, по сравнению с периферией. Такая ситуация приводит к снижению интенсивности нагрева и сушки материала. Но, с другой стороны, неоднородность смеси не является единственным фактором, определяющим эффективность работы пневматической сушилки. При выборе оптимальной конструкции камеры смешивания, необходимо исключить контакт высушиваемых частиц с внутренними стенками аппарата. Данные о нагреве частиц и об их контакте со стенками представлены в таблице.





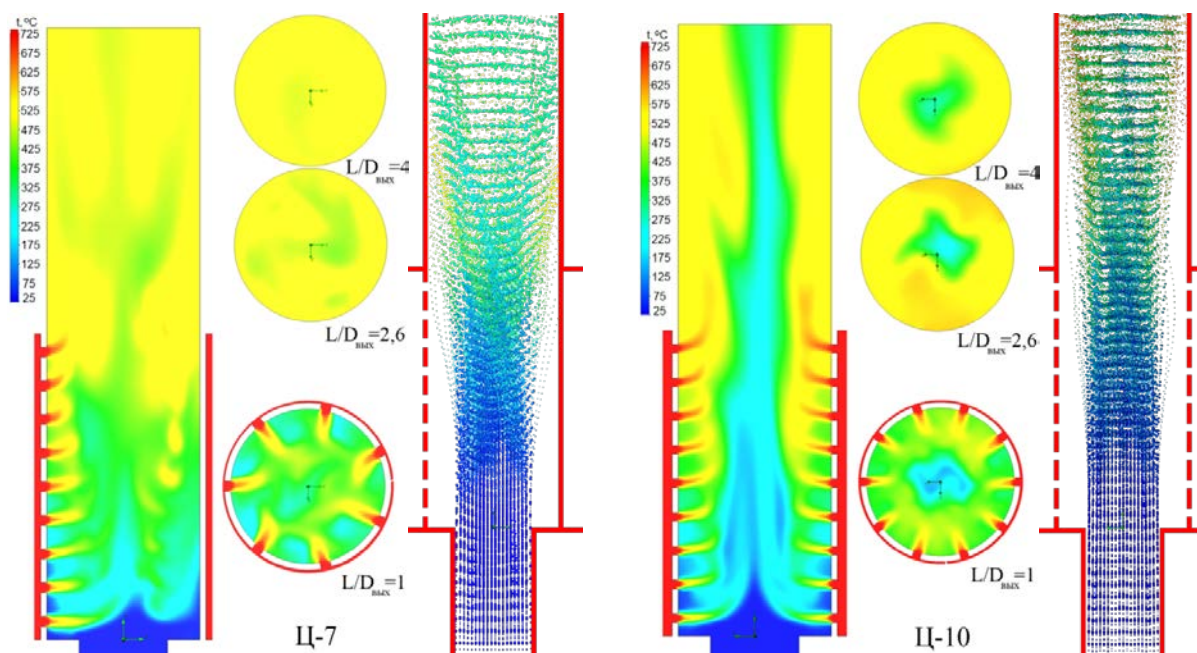


Рис. 2. Контурные эпюры температур потока в цилиндрической пневмотрубе

Таблица. Результаты CFD-моделирования

Камера смешивания	$\Delta p$ , Па	$p_{гр}$ , Па	Средняя температура частиц (°C) в сечении $L/D_{вых} = 4$ (с вероятностью 95 %) для фракции		Доля частиц (%), контактирующих со стенками камеры смешивания / пневмотрубы в целом, для фракции	
			0,2 мм	0,4 мм	0,2 мм	0,4 мм
			Ц-5	80	736	-
Ц-7	82	753,8	$272,0 \pm 8,4$	$139,0 \pm 2,8$	7/84	0/51
Ц-8	86,4	757,2	$253,0 \pm 17,8$	$130,9 \pm 8,5$	5/67	0/11
Ц-10	86,4	770,3	$236,8 \pm 17,7$	$122,7 \pm 7,7$	0/40	0/0
Ц-15	82,7	791,4	$206,2 \pm 19,7$	$109,6 \pm 8,4$	0/0	0/0

Результаты CFD-моделирования движения частиц песка размером 0,2 мм и 0,4 мм, приведенные на рис. 2, свидетельствуют о том, что радиальные струи вызывают закручивание потока газозвеси. В результате частицы начинают двигаться по восходящей спирали. Этот эффект вызван наклоном струй в направлении течения газа в газораспределителе и определяется соотношением статического и динамического давления в нём. С увеличением количества отверстий (при соответствующем уменьшении их диаметра) интенсивность вращения газозвеси ослабевает, поскольку, в этом случае уменьшается время взаимодействия частиц со струями и соответственно расстояние их оттеснения от стенок.

При числе отверстий по окружности камеры смешивания от 5 до 8 зазоры между отверстиями достаточно велики, и недосушенные частицы, выбрасываемые струями на периферию, имеют возможность контактировать со стенками пневмотрубы.

При размещении десяти отверстий по окружности контакт частиц со стенками наблюдается на расстоянии  $L/D_{вых} > 3$ . Причём взаимодействуют лишь частицы фракции 0,2 мм, имеющие температуру более 220°C, то есть уже полностью

высушенные. При 15 отверстиях по окружности контакт частиц со стенками не происходит, но интенсивность нагрева частиц относительно камеры Ц-7 снижается почти на четверть.

Помимо температуры в ходе моделирования рассматривали влияние расположения отверстий на гидравлическое сопротивление пневмотрубы ( $\Delta p$ ) и необходимое для ввода струй избыточное давление в газораспределителе ( $p_{гр}$ ). Гидравлическое сопротивление вычисляли как разность между полным давлением потока в двух сечениях: первое на 35 мм ниже начала камеры смешивания, второе – на расстоянии  $L/D_{вых} = 2,6$  (см. таблицу).

Из таблицы видно, что при увеличении числа отверстий по окружности пневмотрубы от 5 до 15 величина гидравлического сопротивления  $\Delta p$  практически не меняется. В то же время, избыточное давление в газораспределителе ( $p_{гр}$ ), необходимое для ввода струй теплоносителя в аксиальный поток, несколько увеличивается, но не более чем на 7,5 %.

### **Выводы**

С точки зрения наименьшей неоднородности смеси, оптимальное число отверстий при вводе одного ряда радиальных струй в поперечный поток справедливо и для случая многорядного ввода радиальных струй в восходящий аксиальный поток. С учётом этого, цилиндрическая камера смешивания с равномерным расположением отверстий может эффективно применяться для нагрева и сушки дисперсных материалов, не склонных к налипанию [3]. Для материалов с повышенной адгезионно-когезионной активностью отверстия по поверхности камеры смешивания следует размещать таким образом, чтобы предотвратить контакт недосушенных частиц со стенками.

Потери давления на перфорированном участке пневмотрубы остаются практически постоянными при изменении относительного шага размещения отверстий (независимо от их диаметра) при условии сохранения неизменного «живого» сечения газораспределителя.

### **Список литературы**

1. Селиверстов А.А., Тимофеев И.Е., Загидуллин С.Х. К вопросу о налипании материала на рабочие поверхности пневматических сушилок // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. №2. с. 208-211.
2. Патент 2476792 РФ, МПК F26B 17/10. Пневматическая сушилка / Селиверстов А.А., Тимофеев И.Е., Шестаков Е.А., Шестаков С.А. -. №2011131360/06; заявл. 26.07.2011; опубл. 27.02.2013, Бюл. №6. - 6 с.: ил.
3. Патент 2525562 РФ, МПК F26B 17/10. Струйный нагреватель / Селиверстов А.А., Загидуллин С.Х., Тимофеев И.Е. -. №2013122342/06; заявл. 14.05.2013; опубл. 20.08.2014, Бюл. №23. - 6 с.: ил.
4. Oechsle, V.L., Mongia, H.C., Holdeman, J.D. An analytical study of dilution jet mixing in a cylindrical duct. NASA TM-106181. 1993.
5. Holdeman, J.D., Liscinsky, D.S., Oechsle, V.L., Samuelson, G.S., Smith, C.E. Mixing of multiple jets with a confined subsonic crossflow in a cylindrical duct. NASA TM-107185. 1996.



**РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ И ПРОФЕССИОНАЛЬНО-НАПРАВЛЕННЫХ  
ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

**Синица А.С., Якимов Н.Н.,  
научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.  
Сибирский федеральный университет**

Исследование поведения различных систем (технических, экономических, экологических и других) часто приводит к составлению, анализу и решению уравнений, включающих как параметры системы, так и скорости их изменения, аналитическим выражением которых являются производные. Такие уравнения, содержащие производные, называются дифференциальными.

В математике дифференциальные уравнения занимают особое место. Математическое исследование самых разнообразных явлений, происходящих в природе, часто приводит к решению этих уравнений, поскольку законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются достаточно часто в форме дифференциальных уравнений.

Одна из задач, которая стоит перед инженером – это задача адекватного описания интересующего его процесса в математических терминах, причем при дальнейшем анализе математической модели могут быть использованы возможности современных компьютерных средств.

Целью нашего исследования являлось получение опыта построения математических моделей процессов и явлений посредством решения прикладных и профессионально-направленных задач в рамках интегрированного обучения (в соответствии с требованиями 1 и 7 стандартов CDIO).

Математический анализ процессов и явлений действительности обычно начинается с попыток представить те или иные естественнонаучные законы в форме различных алгебраических выражений связывающих переменные (математических моделей). Такое представление дает лишь приближенное описание реальной картины.

В рамках нашей работы для решения задач мы использовали такой математический аппарат, как теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Чтобы составить дифференциальное уравнение, описывающее процесс прикладной задачи, необходимо выяснить какой смысл производной (геометрический или физический) можно использовать, исходя из ее условий. Если в условиях задачи трудно обнаружить тот или иной смысл производной, то рассматривают предел отношения приращения величин (функции и аргумента, описывающих процесс), то есть определение производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приведем примеры задач, описывающие физические и химические процессы, в математических моделях которых составляются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

*Формулировка задачи 1.* Кусок металла с температурой  $a = 20$  °С помещен в дуговую сталеплавильную печь, температура которой равна  $b = 1500$  °С. При разности температуры печи и металла в  $T$  °С металл нагревается со скоростью  $kT$  °С/мин. Найти



функцию зависимости температуры металла в дуговой сталеплавильной печи от времени?

*Решение.* Составим математическую модель процесса, описанного в данной профессионально-направленной задаче. Введем следующие переменные. Пусть  $t$  – время нагревания (независимая переменная),  $T$  – температура металла в печи в момент времени  $t$  ( $T$  – функция от  $t$ ),  $T_{мет.}$  – температура металла до попадания в плавильную печь,  $T_{печ.}$  – температура печи.

Положим:

$$T_{мет.} = a;$$

$$T_{печ.} = b.$$

Выражение  $\frac{dT}{dt}$  представляет собой, исходя из физического смысла производной, скорость нагревания куска металла в печи. По условию задачи она пропорциональна разности между температурой печи и температурой металла в печи. Т.е.

$$\frac{dT}{dt} = k(T_{печ.} - T).$$

Решим, полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dT}{T_{печ.} - T} = k dt;$$

$$\int \frac{dT}{T_{печ.} - T} = k \int dt;$$

$$-\ln(T_{печ.} - T) = kt + \ln c;$$

$$T_{печ.} - T = ce^{-kt};$$

$$T = T_{печ.} - ce^{-kt}.$$

Из начальных условий при  $t = 0$  имеем

$$T_{мет.}(0) = T_{мет.};$$

$$a = b - ce^{-k0};$$

$$c = b - a;$$

$$T = b - (b - a)e^{-kt}.$$

Из специальной литературы известно, что в дуговой сталеплавильной печи за время  $t = 30$  мин металл нагревается до  $T = 1460$  °С (данные взяты из журнала «Siemens VAI Metals Technologies»). Подставляя выше приведенные начальные данные с учетом условий задачи, получим:

$$1460 = 1500 - (1500 - 20)e^{-k30};$$

$$40 = \frac{1480}{e^{30k}};$$

$$e^{30k} = 37;$$

$$30k = \ln 37;$$



$$k = \frac{3,611}{30} \approx 0,12;$$

$$T = 1500 - 1480e^{-0,12t}.$$

Полученная функция зависимости температуры металла в печи от времени представляет собой математическую модель процесса изменения температуры куска металла в дуговой сталеплавильной печи, но рассмотрен только частный случай.

Далее, для иллюстрации процесса нагревания металла в данной печи, построим график полученной функции. На графике приведена зависимость температуры металла в печи от времени при нагревании (рис.1).

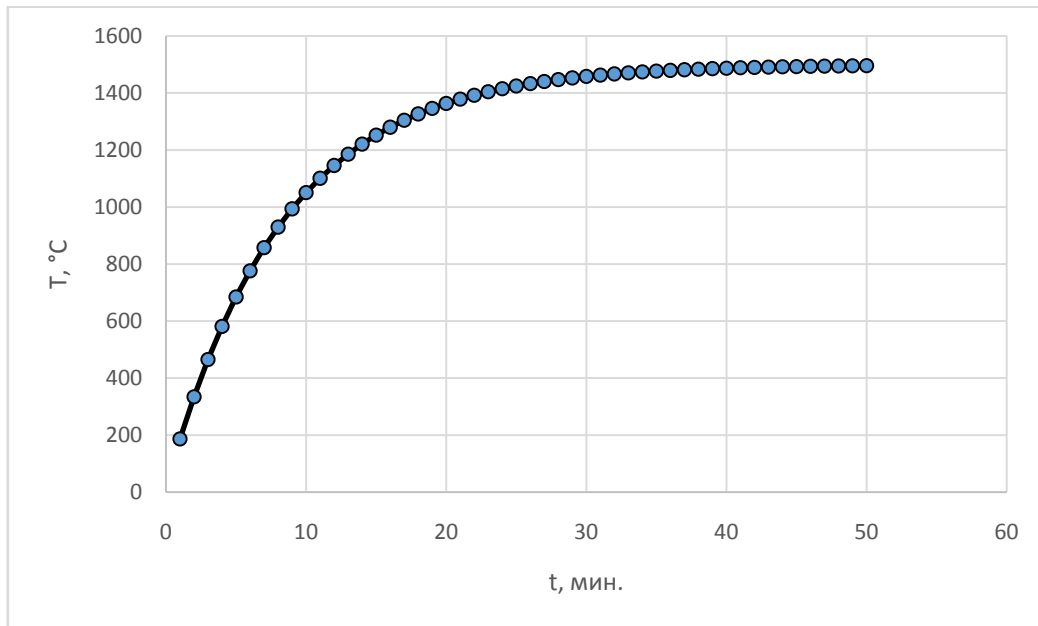


Рис.1.

**Формулировка задачи 2.** Воздух содержит 8%  $CO_2$ . Он пропускается через цилиндрический сосуд с поглотительной массой. Если воздух, прошедший слой в 10 см толщиной, содержит 2%  $CO_2$ , то какой толщины должен быть поглотительный слой для того, чтобы выходя из поглотителя, воздух содержал только 1% углекислоты?

**Решение.** Математическая модель поглощения газа и закон изменения содержания  $CO_2$  в воздухе в зависимости от толщины поглотительного слоя описаны в специальной литературе. Он получен, как общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $\frac{da}{dh} = -ka$  в следующем виде:  $a = ce^{-kh}$ .

Далее из условия задачи имеем:

- 1) Если  $h = 0$  и  $a = 8\%$ , тогда  $8 = ce^{-k \cdot 0}$ ;  $c = 8$ ;  $a = 8e^{-kh}$ .
- 2) Найдем  $k$ , если  $a = 2\%$ ,  $h = 10$  см, то:

$$2 = 8e^{-k \cdot 10};$$

$$e^{-10k} = 0,25;$$

$$-10k = \ln 0,25;$$

$$k = -\frac{\ln 0,25}{10};$$

$$k = 0,1386.$$

3) Подставляя значение  $k$  в выражение  $a = 8e^{-kh}$ , получим:

$$a = 8e^{-0,1386 \cdot h};$$

$$e^{-0,1386 \cdot h} = \frac{a}{8}.$$

По условию задачи  $a = 1\%$ , тогда

$$e^{-0,1386 \cdot h} = \frac{1}{8};$$

$$-0,1386h = \ln 0,125;$$

$$h = \frac{-2,0794}{-0,1386} \approx 15 \text{ см.}$$

На примере решения данной задачи был получен опыт учета начальных условий задачи Коши при нахождении частного решения дифференциального уравнения первого порядка, если известно общее решение.

В процессе выполнения исследования нами был получен опыт корректной работы текстовыми и электронными информационными ресурсами, закреплены предметные знания по теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Анализируя решение задач, описывающих физические и химические процессы, хотелось бы отметить, что математический аппарат данного раздела тесно интегрируется с содержанием других изучаемых естественнонаучных дисциплин в вузе и владение им необходимо будущему инженеру металлургу.

В результате построения математических моделей процессов, описанных в профессионально-направленной и прикладной задачах, получили опыт математического моделирования начального уровня и элементарные навыки проектирования в исследовании.

Для иллюстрации полученных результатов в случае профессионально-направленной задачи нами были использованы возможности современных графических редакторов.

### Список литературы

1. Бутакова С.М. Чеусова Е.П. Применение дифференциальных уравнений первого порядка к решению прикладных задач / С.М. Бутакова, Е.П. Чеусова. – Красноярск: Гос. Обр. учр. «ГАЦМиЗ», 2003. – 36 с.
2. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я. Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1982. – 512 с.
3. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Е.А. Пушкарь. – М.: МГИУ, 2007. – 254 с.
4. Щербакова Ю.В. Дифференциальные уравнения: конспект лекций / Ю.В.Щербакова. – М.: ЭКСМО, 2007. – 160 с.
5. Siemens VAI Metals Technologies. Austria [Электронный ресурс] / <http://www.industry.siemens.com/datapool/industry/industrysolutions/metals/simetal/ru/EAF-Solutions-ru.pdf> (дата обращения: 25.03.15).



## ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ

Трухина Т.Г., Иванова Д.Н.,  
научный руководитель канд. пед. наук Бугаева Т.П.  
Сибирский федеральный университет

Успешное достижение организацией новых целей зависит от умения руководства грамотно спланировать работу предприятия: определить цели и задачи, опираясь на них разработать программу развития фирмы, проанализировать способы ресурсного обеспечения. Исходя из этого, построение и использование планов является одной из главных предпосылок оптимального управления производством, которое позволяет обеспечить устойчивость бизнеса, избежать риск банкротства, модернизировать выпускаемую продукцию, повысить эффективность производства.

Цель работы - изучить принципы построения моделей линейного программирования для принятия оптимальных решений, получить навыки применения информационных технологий для решения типовых задач линейного программирования.

*Оптимальное планирование* - система методов обоснования наилучшего с точки зрения поставленной цели и объективных условий плана развития организации. В его основе лежат *экономико-математические модели* объектов всех уровней, алгоритмов и машинных программ, методов анализа и оценок результатов[1]. Они позволяют с меньшими затратами времени и средств находить количественное выражение взаимосвязи между сложными объектами и процессами с целью их исследования и управления ими. Применение экономико-математических методов способствует устранению субъективизма в планировании и повышает научный уровень обоснованности плана. Основные положения экономико-математического моделирования состоят в определении методики выбора и задания критерия оптимальности, формализации модели функционирования объекта управления, построении ограничений по ресурсам и заданиям, разработке алгоритма численного анализа модели, анализу фактического развития и совершенствования разработанных средств формирования решений в управлении производством.

Особенно широкое применение на практике нашли методы линейного программирования. Они являются достаточно простыми и эффективными, с их помощью решается широкий круг внутривозовского и отраслевого планирования. Задача линейного программирования - это выбор из множества допустимых планов наиболее оптимального, при этом система ограничений диктуется условиями предприятия[2].

К типовым задачам линейного программирования относят задачи на раскрой материалов, задачи о наилучшем составе смеси, об оптимальном плане выпуска продукции, о планировании перевозок, о планировании размещения перевозок и др.

Рассмотрим решение задачи линейного программирования на примере хлебопекарного предприятия.

Задача. Предприятие производит два вида хлеба (белый и ржаной), по 50 булок каждого вида в день. Требуется максимизировать выручку и рассчитать требуемый объем выпуска, исходя из доступного сырья на складе. Исходные данные были предоставлены ИП Иванов Н.В. и отображены в Таблице 1.



Таблица 1. Расчёт сырья и затрат на производство 1 булки хлеба

Наименование	Мука в/с, кг	Мука ржаная, кг	Вода, л	Соль, кг	Дрожжи, кг	Электричество, квт/ч	Цена за единицу товара, руб.	Себестоимость, руб.	Прибыль, руб.
Белый хлеб	0,42	0	0,32	0,006	1	0,116	22,00	14,60	7,4
Ржаной хлеб	0,21	0,21	0,32	0,006	1	0,116	20,00	12,80	7,2
Цена за единицу, руб.	33,00	25,00	0,00	17,00	0,50	1,50			

Для составления решения задачи линейного программирования в первую очередь необходимо построить математическую модель.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  количество производимых белых и чёрных булок хлеба. До максимизации прибыль и выручка производства составляли:

$$(7,4 \cdot 50) + (7,2 \cdot 50) = 730 \text{ (руб.) - прибыль в день}$$

$$730 \cdot 30 = 21.900 \text{ (руб.) - прибыль в месяц}$$

$$(22 \cdot 50) + (20 \cdot 50) = 2.100 \text{ (руб.) - выручка в день}$$

$$2.100 \cdot 30 = 63.000 \text{ (руб.) - выручка в месяц}$$

Введем ограничения производства в день, согласно с запасами сырья на складе.

$$\text{Мука в/с: } 0,42x_1 + 0,21x_2 \leq 50 \text{ (1 мешок муки в/с в день)}$$

$$\text{Мука ржаная: } 0,21x_2 \leq 25 \text{ (0,5 мешка ржаной муки в день)}$$

$$\text{Соль: } 0,006(x_1 + x_2) \leq 1 \text{ (1 пачка соли в день)}$$

$$\text{Дрожжи: } 0,001(x_1 + x_2) \leq 0,2 \text{ (2 пачки дрожжей по 100г в день)}$$

Мы должны максимизировать прибыль за счёт увеличения выпуска продукции, (т.е. при  $x_1 \geq 50$  и  $x_2 \geq 50$ ), при этом не выходя за рамки системы ограничений.

Целевая функция:

$$F = 22x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

Решим задачу графическим методом.

Представим введенные ограничения в виде системы:

$$\begin{cases} 42x_1 + 21x_2 \leq 5000 & - L_1 \\ 21x_2 \leq 2500 & - L_2 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 1000 & - L_3 \\ x_1 + x_2 \leq 200 & - L_4 \\ x_1 \geq 50 & - L_5 \\ x_2 \geq 50 & - L_6 \end{cases}$$

Построим линии  $L_i$  условных ограничений на координатной плоскости. Выделим область допустимых решений.

Определим координаты вектора нормали. Вектор нормали – это радиус-вектор точки, координаты которой равны коэффициентам целевой функции.

Таким образом, вектор нормали:  $\vec{n}(22; 20)$ .

Прямая целевой функции  $F$  перпендикулярна вектору нормали. Методом параллельного переноса сдвигаем прямую до пересечения с крайней точкой выхода из области допустимых решений – точкой  $A$ . В этой точке достигается максимум целевой функции.

Решение графическим методом наглядно изображено на рисунке 1.





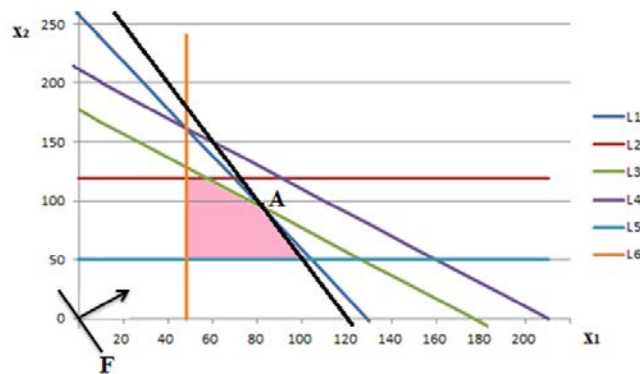


Рисунок 1. Графическое решение задачи

Чтобы получить численное значение максимума целевой функции, необходимо найти координаты точки  $A$  и подставить их в целевую функцию  $F$ :

$$F_{\max} = F(A)$$

Точка  $A$  - это точка пересечения прямой целевой функции с прямыми  $L_1$  и  $L_3$ .

Запишем систему уравнений этих прямых и найдём неизвестные переменные.

$$\begin{cases} 42x_1 + 21x_2 = 5000 \\ 6x_1 + 6x_2 = 1000 \end{cases} \quad |$$

$$x_1 = 71,5 \approx 71 \text{ - булка ржаного хлеба}$$

$$x_2 = 95,2 \approx 95 \text{ - булок белого хлеба}$$

После того, как нам стало известно количество выпускаемой продукции каждого вида, мы сможем вычислить выручку и прибыль предприятия в день и в месяц.

$$F_{\max} = 22 \cdot 71 + 20 \cdot 95 = 3462 \text{ (руб.) - выручка в день}$$

$$3462 \cdot 30 = 103.860 \text{ (руб.) - выручка в месяц}$$

$$(7,4 \cdot 71) + (7,2 \cdot 95) = 1209 \text{ (руб.) - прибыль в день}$$

$$1209 \cdot 30 = 36.270 \text{ (руб.) - прибыль в месяц}$$

Таким образом, прибыль предприятия при существующих ограничениях максимально можно увеличить на 65%.

Проверим решение с помощью симплекс метода.

В MS Excel имеется процедура «Поиск решения», которая используется для решения задач линейного программирования. Пропишем в таблице все известные данные, и в графу «необходимо» введем формулу расчета необходимого сырья для производства хлеба.

Представим данные в виде таблицы, изображённой на рисунке 2.

Наименование	Мука в/с, кг	Мука ржаная, кг	Соль, кг	Дрожжи, кг	Ограничения по выпуску, шт	Цена за единицу товара, руб
Белый хлеб	0,42	0	0,006	0,001	50	22,00 Р
Ржаной хлеб	0,21	0,21	0,006	0,001	50	20,00 Р
Доступно	50	25	1	0,2		2100
Необходимо	31,5	10,5	0,6	0,1		

Рисунок 2. Таблица с данными задачи



Прежде чем обратиться к процедуре «Поиск решения», полезно выделить целевую ячейку.

Для вызова процедуры следует в меню войти в «Сервис» и активизировать строку «Поиск решения». При входе в «Поиск решения» на экране появляется диалоговое окно (рис. 3). Верхнее поле «Установить целевую функцию» первоначально является активным (если нет, то его следует активизировать), в нем должен быть указан адрес целевой ячейки.

Так как в решаемой задаче требуется максимизировать выручку, то переключатель «Равное значение» должен быть установлен в положение «Максимальное значение».

Добавим ограничения по наличию сырья на складе и объему выпуска не менее 50 булок каждого вида в день.

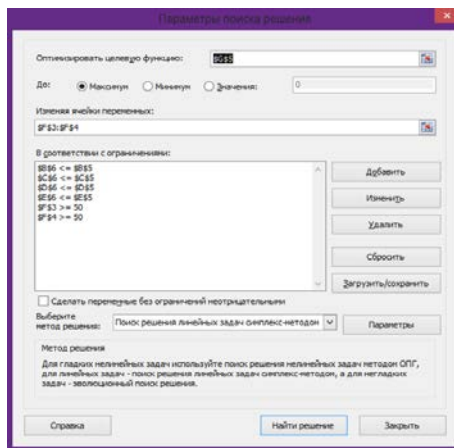


Рисунок 3. Параметры поиска решений

В результате получим отчет с оптимальным вариантом решения (рис. 4).

Параметры поиска решения						
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование						
Максимальное число подходов Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%						
Ячейка целевой функции (Максимум)						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение			
\$B\$5	Доступно Цена за единицу товара, руб	2100	3476,190476			
Ячейки переменных						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное		
\$F\$3	Белый хлеб Ограничения по выпуску, шт	50	71,42857143	Продолжить		
\$F\$4	Ржаной хлеб Ограничения по выпуску, шт	50	95,23809524	Продолжить		
Ограничения						
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск	
\$B\$6	Необходимо Мука в/с, кг	50	\$B\$6<=\$B\$5	Привязка	0	
\$C\$6	Необходимо Мука ржаная, кг	20	\$C\$6<=\$C\$5	Без привязки	5	
\$D\$6	Необходимо Соль, кг	1	\$D\$6<=\$D\$5	Привязка	0	
\$E\$6	Необходимо Дрожжи, кг	0,166666667	\$E\$6<=\$E\$5	Без привязки	0,033333333	
\$F\$3	Белый хлеб Ограничения по выпуску, шт	71,42857143	\$F\$3>=50	Без привязки	21,42857143	
\$F\$4	Ржаной хлеб Ограничения по выпуску, шт	95,23809524	\$F\$4>=50	Без привязки	45,23809524	

Рисунок 4. Отчёт по результатам

В результате решения задачи двумя разными способами, мы убедились, что при использовании всех доступных ресурсов для производства хлеба, имеющихся на складе, предприятие может увеличить свою прибыль на 65%.

После ознакомления руководителя хлебопекарного предприятия ИП Иванов Н.В. с результатами решения задачи, был сделан вывод о том, что увеличение выпуска продукции на 65% не рентабельно, так как реализовать весь хлеб в магазинах будет не

возможно. Для того, чтобы узнать, какое количество продукции реально продать и получить от этого максимальную прибыль, необходимо ввести ограничения, которые будут характеризовать покупательскую способность. Точную числовую оценку этих ограничений мы можем узнать только после проведения маркетинговых исследований.

Применение экономико-математических моделей в оптимальном планировании позволяет руководству быстро и качественно определять цели и задачи предприятия, а также способы их реализации. Поэтому владение приемами и методами решения оптимизационных задач линейного программирования, является важной составляющей образования экономиста-менеджера.

#### **Список литературы**

1. Сайт Экономический словарь [Электронный ресурс] - Режим доступа: [http://abc.informbureau.com/html/iioeiaeuia\\_jeaiediaiea.html](http://abc.informbureau.com/html/iioeiaeuia_jeaiediaiea.html)
2. А.В. Стариков, И.С. Куцева "Экономико-математическое и компьютерное моделирование", 2008
3. Л.А. Киржнер "Менеджмент организаций", 2009
4. Сайт Экономика предприятия [Электронный ресурс] - Режим доступа: [http://knowledge.allbest.ru/economy/3c0b65625b2ad68a5c43a88421216c37\\_3.html](http://knowledge.allbest.ru/economy/3c0b65625b2ad68a5c43a88421216c37_3.html)



## ПРИМЕРЫ ПОСТОРЕНИЯ ОГИБАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

Туревич С.О.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Семушева А.Ю.

*Сибирский федеральный университет*

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, c) = 0,$$

(1)

Где  $F(x, y, c)$  – гладкая функция трех переменных. Будем считать, как обычно, что  $x$  и  $y$  – декартовы координаты, а переменную  $c$  будем называть параметром. Если в уравнении (1) зафиксировать какое-то значение параметра  $c$ , то получим уравнение некоторой общей кривой. Поэтому уравнение (1) задает на плоскости  $Oxy$  однопараметрическое семейство кривых. Кривую семейства, соответствующую параметру  $c$ , будем обозначать  $S(c)$ , а все семейство обозначим  $S$ .

Кривая  $l$  называется *огibaющей* семейства  $S$ , если в каждой своей точке она касается какой-либо линии этого семейства, причем в разных точках – разных линий. Параметрические уравнения огibaющей естественно записать в виде

$$x = x(c), \quad y = y(c),$$

Причем точка с координатами  $x(c), y(c)$  есть точка касания огibaющей и кривой  $S(c)$  из заданного семейства.

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F'_c(x, y, c) = 0, \end{cases}$$

(2)

называется *дискриминантным множеством* или *дискриминантной кривой* семейства (1).

**Теорема.** *Если огibaющая семейства  $S$  существует, то она является подмножеством дискриминантной кривой.*

**Пример 1.** Найдем огibaющую семейства парабол, оси которых параллельны оси  $Oy$ , вершин лежат на окружности единичного радиуса с центром  $O$ , а параметр  $p$  каждой из парабол равен половине проекции вектора  $\overline{OC}$  на ось  $Oy$ , где  $C$  – вершина параболы.

Точка  $C$  имеет координаты  $\cos c, \sin c$ , поэтому уравнение соответствующей параболы с вершиной  $C$  из семейства  $S$  имеет вид

$$(x - \cos c)^2 = 2p(y - \sin c)$$

По условию задачи  $p = \frac{1}{2} \sin c$ , так что окончательное уравнение семейства принимает вид

$$(x - \cos c)^2 - (y - \sin c) \sin c = 0,$$

или



$$x^2 - 2x \cos c - y \sin c + 1 = 0.$$

Составляем систему вида (2), в нашем случае имеет следующий вид

$$\begin{cases} x^2 - 2x \cos c - y \sin c + 1 = 0, \\ 2x \sin c - y \cos c = 0. \end{cases}$$

(3)

Чтобы найти параметрическое уравнение огибающей, выразим из последнего уравнения  $y$  и подставим в первое уравнение. В результате получится квадратное уравнение относительно  $x$ :

$$x^2 - \frac{2x}{\cos c} + 1 = 0.$$

Оно имеет два корня:  $x = (1 \pm \sin c) / \cos c$ . Подставляя каждое из найденных значений  $x$  во второе уравнение системы (3), находим соответствующее ему значение  $y$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sin c}{\cos c}, \\ y = 2 \frac{1 + \sin c}{\cos c} \operatorname{tg} c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sin c}{\cos c}, \\ y = 2 \frac{1 - \sin c}{\cos c} \operatorname{tg} c. \end{cases}$$

(4)

Таким образом, огибающая распадается на две кривые. Чтобы понять, какие это кривые, найдем общее уравнение огибающей, исключив из уравнений (3) параметр  $c$ . Перепишем уравнения (3) по-другому:

$$\frac{1}{\cos c} = \frac{x^2 + 1}{2x}, \quad \operatorname{tg} c = \frac{y}{2x}.$$

Отсюда

$$\frac{y^2}{4x^2} = \operatorname{tg}^2 c = \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} = \frac{1 - \cos^2 c}{\cos^2 c} = \frac{1}{\cos^2 c} - 1 = \frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2} - 1,$$

или

$$y^2 = (x^2 + 1)^2 - 4x^2.$$

Итак, огибающая является кривой четвертого порядка. Но это уравнение после преобразования правой части приводит к виду

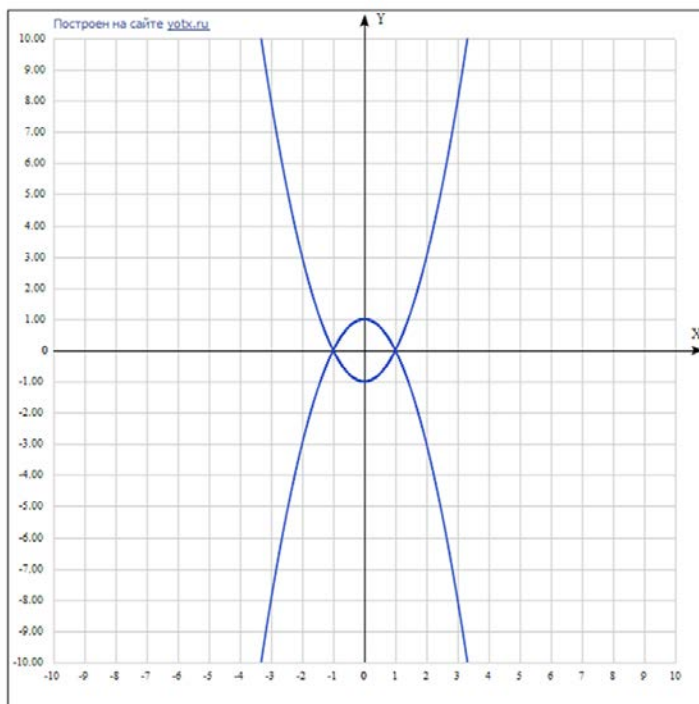
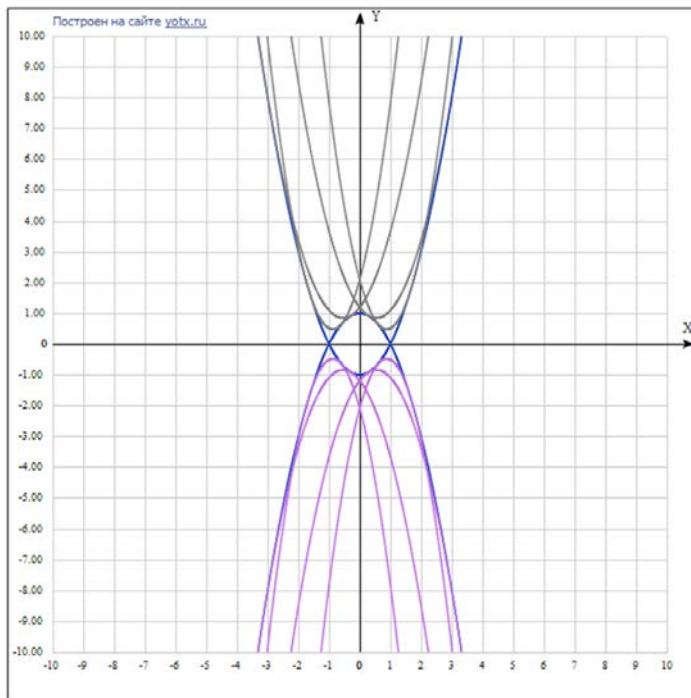
$$y^2 - (x^2 + 1)^2 = 0,$$

или

$$(y + x^2 - 1)(y - x^2 + 1) = 0.$$

Следовательно, данная кривая четвертого порядка является объединением двух парабол  $y = x^2 - 1$  и  $y = -x^2 + 1$ . Они описываются параметрическими уравнениями (4), причем каждая из них (это видно на графике ниже) является огибающей семейства  $S$ .





**Пример 2.** Дано семейство кривых (S):

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$$

При  $c \in [1; 3]$

Составляем систему вида (2)

$$\begin{cases} (x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2, \\ -2(x - c) - 2(y - c) = 2c. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнение системы  $y$  и подставляем его в первое уравнение, тем самым получая две уравнение огибающих:



$$x - c = -y$$

1)  $y = 0$

2)  $x = 0$

