Метод Лагранжа решения многомерных разностных уравнений

1. Обозначим через $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \dots, \boldsymbol{\delta_n}$ операторы сдвига по переменным $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$, действующие на функцию $\boldsymbol{z(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ следующим образом:

$$\delta_1 z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(x_1 + 1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\delta_2 z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(x_1, x_2 + 1, \dots, x_n),$$
$$\dots$$
$$\delta_{n-1} z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(x_1, \dots, x_{n-1} + 1, x_n),$$
$$\delta_n z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(x_1, x_2, \dots, x_n + 1)$$

и определим оператор $\delta^m = \delta_1^{m_1} \dots \delta_n^{m_n}$

$$\delta_1^{m_1} \dots \delta_n^{m_n} z(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n).$$

Легко видеть, что операторы $\delta_1^{m_1}, \dots, \delta_n^{m_n}$ перестановочны, например

$$\delta_1^{m_1} \delta_2^{m_2} = \delta_2^{m_2} \delta_1^{m_1}$$

Пусть $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ - полином от $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) z(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \qquad (1)$$

Если решение искать в виде $z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n}$, то оно будет удовлетворять уравнению (1) если $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V$, где

$$V = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}.$$

Из линейности разностного уравнения следует, что линейные комбинации решений вида $\alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n}$ также будут решениями.

Нетрудно видеть, что решением будет и функция

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_V \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n} \, d\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где $d\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – некоторая мера на характеристическом множестве V.

Таким образом, если интеграл существует, то $z(x_1, x_2, \dots, x_n) -$ решение, если $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Идея метода Лагранжа (см.[Levy]) состоит в том, чтобы выбрать меры $d\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ подходящим образом.

2. Применим метод Лагранжа к уравнению

$$z(x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1) = c z(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (2)$$

где c – произвольная константа.

Полиномиальный разностный оператор имеет вид

$$\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = (\delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_n - c).$$

Решим уравнение $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, например, относительно α_n

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n - c = 0, \alpha_n = \frac{c}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}$$

и рассмотрим интеграл вида

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, \alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\alpha_1, \dots, \frac{c}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right) \alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2} \dots \left(\frac{c}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right)^{x_n} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\alpha_1, \dots, \frac{c}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right) \alpha_1^{x_1-x_n}\alpha_2^{x_2-x_n} \dots \alpha_{n-1}^{x_{n-1}-x_n} c^{x_n} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}.$$

То есть решение имеет вид

$$z(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{c}^{x_n} B(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n),$$

где B- произвольная функция $(n-1)$ переменной.

Мы получили решение не симметричное относительно переменных. Сформулируем более симметричный ответ.

Предложение 1. Уравнение (2) имеет общее решение вида

$z(x_1, \dots, x_n) = c^{x_j} B\big(x - Ix_j\big), x \in X_j, j = 1, \dots, n$ *,I=(1,1,…,1)*

где $X_j = \{x \in Z^n\colon\ x_1 > x_j,\ x_2 > x_j, \dots [j],\ x_{j+1} \geq x_j\ \dots,\ x_n \geq x_j\}$.

При этом $\bigcup_{j=1}^{n} X_j = Z^n$, $X_j \cap X_i = \emptyset$ для $i \neq j$.

3. Пусть дано разностное уравнение от двух переменных $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ вида

$$az(x_1 + 2, x_2) + bz(x_1 + 1, x_2 + 1) + cz(x_1, x_2 + 2) = 0, \qquad (3)$$

где a, b, c - произвольные константы.

Найдено общее решение уравнения (3) по методу Лагранжа.

Предложение 2. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$z(x_1, x_2) = \rho_1^{x_1} B_1(x_1 + x_2) + \rho_2^{x_1} B_2(x_1 + x_2)$, где

$$\rho_{1,2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

а B_1, B_2 произвольные функции от одной переменной.

Применим *Предложение 2* к решению одной вероятностной задачи.

Пусть два игрока A и B участвуют в сделках друг с другом. Результат каждой сделки заключается в том, что монета переходит от одного игрока *к другому. Вероятность выигрыша игрока А равна р. Игрок выходит из сделки если он приобретает N монет. Какова вероятность, что из игры выйдет игрок А?*

Пусть x_1, x_2 число монет игроков А и В на любом этапе, следовательно $x_1, x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 = k$, где k некоторая константа

Пусть функция $z(x_1, x_2)$ есть функция выигрыша игрока А в ситуации (x_1, x_2). Игрок А по условию может выйти из игры в двух случаях: если он приобретает монету, либо если отдает монету и количество его монет становится равным N, тогда

$$z(x_1, x_2) = pz(x_1 + 1, x_2 - 1) + (1 - p)z(x_1 - 1, x_2 + 1) \quad (4)$$

Запишем граничные условия:

$$z(N, k - N) = 1,$$

$$z(k - N, N) = 0.$$

Из *Предложения 2* общее решение имеет вид

$$z(x_1, x_2) = B_1(x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{x_1} B_2(x_1 + x_2),$$

где B_1, B_2 произвольные функции от одной переменной.
Найдем B_1, B_2 из граничных условий:

$z(N, k - N) = 1,$

$B_1(N + k - N) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{x_1} B_2(N + k - N) = 1;$

$B_1(k) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{x_1} B_2(k) = 1;$

$z(k - N, N) = 0,$

$B_1(k - N + N) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{k-N} B_2(k - N + N) = 0;$

$B_1(k) + \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{k-N} B_2(k) = 0;$

$$\begin{cases} B_1(k) + \left(\dfrac{1}{p} - 1\right)^{x_1} B_2(k) = 1, \\ B_1(k) + \left(\dfrac{1}{p} - 1\right)^{k-N} B_2(k) = 0. \end{cases}$$

Следовательно

$$B_2(k) = \frac{q^N}{q^{2N} - q^k}, B_1(k) = \frac{q^k}{q^k - q^{2N}},$$

где $q = \frac{1}{p} - 1$

Получаем

$$z(x_1, x_2) = \frac{q^{x+y}}{q^{x+y} - q^{2N}} + \frac{q^{x+N}}{q^{2N} - q^{x+y}} = \frac{q^{N-y} - 1}{q^{2N-x-y} - 1}.$$

Применим *Предложение (2)* для решения другой задачи. Найдем решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям вида

$$z(x_1, 0) = \varphi(x_1),$$

$$z(0, x_2) = \omega(x_2),$$

где $\varphi(x_1), \omega(x_2)$ заданные функции.

Запишем общее решение уравнения (3)

$$z(x_1, x_2) = \rho_1^{x_1} B_1(x_1 + x_2) + \rho_2^{x_1} B_2(x_1 + x_2), \text{ где}$$

$$\rho_{1,2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Найдем B_1, B_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} \rho_1^{x_1} B_1(x_1) + {\rho_2}^{x_1} B_2(x_1) = \varphi(x_1), \\ B_1(x_1) + B_2(x_1) = \omega(x_1). \end{cases}$$

$$B_2(x_1) = \frac{{\rho_1}^{x_1} \omega(x_1) - \varphi(x_1)}{{\rho_1}^{x_1} - {\rho_2}^{x_1}},$$

$$B_1(x_1) = \omega(x_1) - \frac{{\rho_1}^{x_1} \omega(x_1) - \varphi(x_1)}{{\rho_1}^{x_1} - {\rho_2}^{x_1}}.$$