ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР В КОНТАКТИРУЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Е. П. Магденко
Сибирский Федеральный Университет, Институт математики
Научный руководитель – д. ф. – м. н., профессор В. К. Андреев

§1. Постановка задачи

Рассматриваем два тела цилиндрической формы, которые контактируют друг с другом (Рис. 1). Пусть $\theta_j(r,z)$ —стационарное распределение темпратурных сред в точке, $j = 1,2 -$ номер среды. Внутренние источники тепла отсутствуют. Тогда уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид:

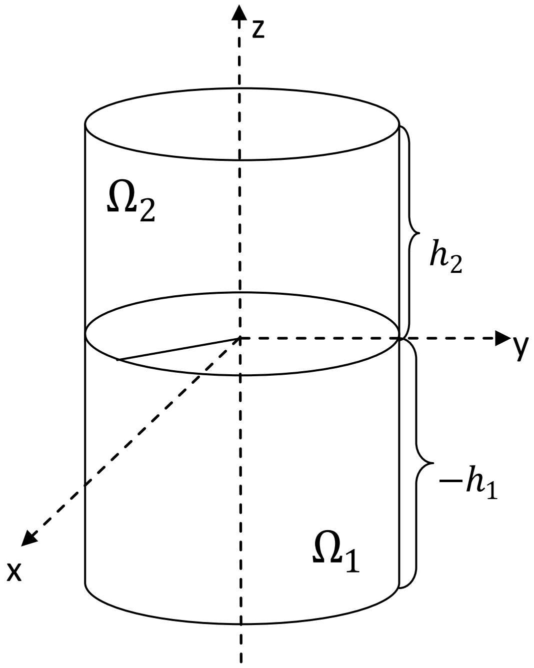

Рис. 1. Геометрия области решения.

$$\frac{\partial^2\theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta_j}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta_j}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Граничные условия таковы ($k_1, k_2 -$ коэффициенты теплопроводности сред)

$$\theta_j(a,z) = \bar{\theta}_j(z),\ \ \theta_1(r,-h_1) = \widetilde{\theta_1}(r),\quad \theta_2(r,h_2) = \widetilde{\theta_2}(r),\ \ \theta_1(r,0) = \theta_2(r,0),$$
$$\frac{k_1\partial\theta_1}{\partial z}(r,0) = \frac{k_2\partial\theta_2}{\partial z}(r,0). \qquad (2)$$

Первые три из них означают, что на всей поверхности цилиндра задана температура, а третье и четвертое – равенство температур и потоков тепла на поверхности контакта (раздела двух сред $z = 0$). Заметим, что для непрерывности температур должны быть выполнены условия согласования:

$$\bar{\theta}_1(-h_1) = \tilde{\theta}_1(a), \quad \bar{\theta}_2(h_2) = \tilde{\theta}_2(a), \quad \frac{k_1 \partial \bar{\theta}_1}{\partial z}(0) = \frac{k_2 \partial \bar{\theta}_2}{\partial z}(0) \qquad (3)$$

Поскольку поставленная задача является линейной, то будем искать сначала решение при $\bar{\theta}_j(z) \equiv 0$.

Решение нашей задачи ищется методом разделения переменных. Найдем частные решения уравнений (1) в виде:

$$\theta_j = R_j(r) Z_j(z) \qquad (4)$$

Подстановка (4) в (1) дает:

$$R_{jrr} Z_j + \frac{1}{r} R_{jr} Z_j + R_j Z_{jzz} = 0,$$

$$\frac{1}{R_j}\left(R_{jrr} + \frac{1}{r} R_{jr}\right) = -\frac{Z_{jzz}}{Z_j} = -\lambda,$$

откуда для $R_j(r)$ получим краевую задачу:

$$R_{jrr} + \frac{1}{r} R_{jr} + \lambda R_j = 0, \quad 0 < r < a$$

$$R_j(a) = 0,$$

$$\left|R_j(0)\right| < \infty \text{ при } 0 < r < a.$$

После замены:

$$x = r\sqrt{\lambda}, \qquad y(x) = R(r) = R\left(x/\sqrt{\lambda}\right)$$

приходим к задаче:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0, \qquad (5)$$

$$y\left(\sqrt{\lambda} a\right) = 0, \qquad |y(0)| < \infty.$$

Следовательно (5) – есть уравнение Бесселя. Решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = A J_0(x) + B N_0(x),$$

где $J_0(x)$, $N_0(x)$ — функции Бесселя. В силу условий ограниченности при $x = 0$ постоянная $B = 0$ и

$$y(x) = AJ_0(x) \qquad (6)$$

$$J_0\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0$$

Пусть $\sqrt{\lambda}a = \mu_m$, где $\mu_m -$ нули $J_0(\mu_m) = 0$. Тогда $\lambda_m = \left(\frac{\mu_m}{a}\right)^2 > 0 -$ счетное множество собственных значений, которым соответствуют собственные функции $(m = 1,2 \dots)$.

$$R_j(r) = AJ_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) \qquad (7)$$

Теперь найдем общее решение уравнения $Z_j^{''} - \lambda_m Z_j = 0$:

$$Z_{jm} = C_{jm}\ sh\sqrt{\lambda_m}z + D_{jm}\ \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}z. \qquad (8)$$

Таким образом, найдено счетное число решений вида (4)

$$\theta_{jm}(r,z) = (C_{jm}\ \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}z + D_{jm}\ \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}z)AJ_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)$$

Произведения А C_{jm}, АD_{jm} снова обозначим через C_{jm}, D_{jm}. Составим формальный ряд

$$\theta_j(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty}(C_{jm}\ \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}z + D_{jm}\ \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}z)J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) \qquad (9)$$

По построению $\theta_j(r,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям на боковой поверхности $\theta_j(a,z) = 0$. Оставшиеся четыре постоянные C_{jm}, D_{jm} находятся из (2). Из равенства температур при $z = 0$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{1m}\ \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}0 + D_{1m}\ \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}0\right)J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{2m}\ \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}0 + D_{2m}\ \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}0\right)J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right),$$

откуда

$$D_{1m} = D_{2m} \qquad (10)$$

Обозначим $k = k_1/k_2$, тогда из равенств потоков тепла

$$\sum_{m=1}^{\infty} k\left(-D_{1m}\, sh\sqrt{\lambda_m}0 + C_{1m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}0\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(-D_{2m}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}0 + C_{2m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}0\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right),$$

т. е.

$$kC_{1m} = C_{2m} \tag{11}$$

Задание температур на нижнем и верхнем основании дают равенства

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(-C_{1m}\, sh\sqrt{\lambda_m}h_1 + D_{1m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}h_1\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \widetilde{\theta_1}(r),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{2m}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}h_2 + D_{2m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}h_2\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \widetilde{\theta_2}(r).$$

С учетом полученных первых двух равенств (10), (11) и замены

$$sh\sqrt{\lambda_m}h_1 = a_m, \qquad \mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}h_2 = c_m, \qquad \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}h_1 = b_m, \qquad \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}h_2 = d_m$$

имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-C_{1m}a_m + D_{1m}b_m) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \widetilde{\theta_1}(r),$$

(12)

$$\sum_{m=1}^{\infty}(kC_{1m}c_m + D_{1m}d_m) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \widetilde{\theta_2}(r).$$

Поскольку левые части (12) – это ряды Фурье известных функций $\widetilde{\theta_1}(r)$, $\widetilde{\theta_2}(r)$ по полной системе $J_0(\mu_m\, {}^{r}/_{a}) \in L_2(r; 0; a)$, а в этом пространстве норма порождена скалярным произведением $(f, g) = \int_0^a rf(r)g(r)dr$ и

$$\left\|J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right\|^2 = \int_0^a rJ_0^2\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)dr = \frac{a^2}{2}J_1^2(\mu_m).$$

Значит, из (12) получим

$$-C_{1m}a_m + D_{1m}b_m = \frac{2\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right)}{a^2 J_1^2(\mu_m)},$$

$$kC_{1m}c_m + D_{1m}d_m = \frac{2\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right)}{a^2 J_1^2(\mu_m)}.$$

Окончательно,

$$D_{1m} = D_{2m} = \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m}\left(\frac{kc_m\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right) + a_m\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right)}{a^2 J_1^2(\mu_m)}\right) \tag{13}$$

$$C_{1m} = \frac{1}{k}C_{2m} = \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m}\left(\frac{b_m\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right) - d_m\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)\right)}{a^2 J_1^2(\mu_m)}\right) \tag{14}$$

Значит, решение нашей задачи полностью найдено в виде рядов (9). Преобразуем ряды для $\theta_j(r,z)$:

$\theta_j(r,z) = \frac{2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m)J_1^2(\mu_m)}\left(\left(b_m\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\right) - d_m\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\right)\right)\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}z + \right.$
$kcm\theta1{,}J0{+}am\theta2{,}J0\mathrm{ch}\lambda mzJ0\mu mra$,

или

$$\theta_j(r,z) = \frac{2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m)J_1^2(\mu_m)}\left(\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\right)\right)\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}(h_1 + z)$$
$$+ \left(\widetilde{\theta_1}, J_0\right)\left(k\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}h_2\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}z - \mathrm{ch}\sqrt{\lambda_m}h_2\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_m}z\right)J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right).$$

Оценим коэффициенты (13), (14) при $\widetilde{\theta_j} = const$. Воспользуемся формулой[1]:

$$xJ_1(x) = \int_0^x \zeta J_0(\zeta)d\zeta.$$

[1] (Тихонов & Самарский, 1972)

$$D_{1m} = D_{2m} = \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m} \frac{\left(kc_m \widetilde{\theta_1} \int_0^a r J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) dr + a_m \widetilde{\theta_2} \int_0^a r J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) dr\right)}{a^2 J_1^2(\mu_m)}$$
$$= \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m} \frac{\left(kc_m \widetilde{\theta_1} + a_m \widetilde{\theta_2}\right)}{\mu_m^2 J_1(\mu_m)}$$

Известно[2], что при $z \to \infty$

$$J_p(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (p + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}\right),$$

тогда

$$J_1 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Из этой формулы следует, что с возрастанием номера m нуля $\mu_m^{(p)}$ разность $\mu_{m+1}^{(p)} - \mu_m^{(p)} \approx \pi$ и можно сделать оценку: $\mu_m \sim m\pi$, поэтому

$$J_1(\mu_m) = J_1(m\pi) \sim \frac{(-1)^{m+1}}{\pi\sqrt{m}}\,.$$

Тогда

$$D_{1m} = D_{2m} \sim \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m} \frac{\left(kc_m \widetilde{\theta_1} + a_m \widetilde{\theta_2}\right)}{m^{3/2}\pi(-1)^{m+1}} \longrightarrow 0 \text{ при } m \longrightarrow \infty$$

Аналогично доказываем для остальных коэффициентов. Получаем, что ряды сходятся в $C[(0,a) \times (-h_1, 0)]$, $C[(0,a) \times (0, h_2)]$.

Теперь докажем, что ряды сходятся в пространстве $L_2[(0,a) \times (-h_1, 0)]$, $L_2[(0,a) \times (0, h_2)]$.

Обозначим за $A_m = (B_m + C_m) = \left[\left(b_m\left(\widetilde{\theta_2}, J_0\right) - d_m\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\right)\right) sh\sqrt{\lambda_m} z +\right.$ *kcmθ1,J0+amθ2,J0*ch*λmz*

[2] (Тихонов & Самарский, 1972)

$$\|\theta_1(r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]}$$
$$= \int_0^a \int_{-h_1}^0 \int_0^{2\pi} r\theta_1^2 d\varphi dz dr$$
$$= 2\pi \int_0^a \int_{-h_1}^0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m) J_1^2(\mu_m)} A_m J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) \right)^2 dz dr$$
$$= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h_1}^0 \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m)^2 J_1^4(\mu_m)} A_m^2 \left\| J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) \right\|^2 dz$$
$$= \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m)^2 J_1^2(\mu_m)} \int_{-h_1}^0 A_m^2(z) dz,$$

где

$$A_m^2(z) = B_m^2 sh^2\sqrt{\lambda_m} z + B_m C_m sh\left(2\sqrt{\lambda_m} z\right) + C_m^2 ch\sqrt{\lambda_m} z) dz.$$

Здесь

$$B_m^2 = b_m^2 \left(\widetilde{\theta_2}, J_0\right)^2 - 2 b_m d_m \left(\widetilde{\theta_2}, J_0\right)\left(\widetilde{\theta_1}, J_0\right) + d_m^2 \left(\widetilde{\theta_1}, J_0\right)^2$$
$$\le \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \left(b_m^2 \left\|\widetilde{\theta_2}\right\|^2 + 2|b_m||d_m| \left\|\widetilde{\theta_1}\right\| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\| + d_m^2 \left\|\widetilde{\theta_1}\right\|^2 \right)$$
$$= \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \left(|b_m| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\| + |d_m| \left\|\widetilde{\theta_1}\right\| \right)^2,$$

$B_m C_m \le \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) (|a_m||b_m| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\|^2 + k|c_m||d_m| \left\|\widetilde{\theta_1}\right\|^2 + \left\|\widetilde{\theta_1}\right\| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\| (k|b_m||c_m| + |a_m||d_m|)),$

$C_m^2 \le \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \left(k^2 c_m^2 \left\|\widetilde{\theta_1}\right\|^2 + 2k|a_m||c_m| \left\|\widetilde{\theta_1}\right\| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\| + a_m^2 \left\|\widetilde{\theta_2}\right\|^2 \right) = \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \left(k|c_m| \left\|\widetilde{\theta_1}\right\| + |a_m| \left\|\widetilde{\theta_2}\right\| \right)^2.$

Следовательно,

$$\int_{-h_1}^{0} A_m^2 dz = \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \left(\left(|b_m| \|\widetilde{\theta_2}\| + |d_m| \|\widetilde{\theta_1}\| \right)^2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{a_m}{4\sqrt{\lambda_m}} \right) \right.$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \left(|a_m||b_m| \|\widetilde{\theta_2}\|^2 + k|c_m||d_m| \|\widetilde{\theta_1}\|^2 \right.$$
$$\left. + \|\widetilde{\theta_1}\| \|\widetilde{\theta_2}\| (k|b_m||c_m| + |a_m||d_m|) \right) (1 - b_m)$$
$$\left. + \left(k|c_m| \|\widetilde{\theta_1}\| + |a_m| \|\widetilde{\theta_2}\| \right)^2 \left(-\frac{h_1}{2} + \frac{a_m}{4\sqrt{\lambda_m}} \right) \right)$$

Тогда

$\|\theta_1(r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]} \leq$
$\pi \frac{a^4}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k b_m c_m + a_m d_m)^2} \left(\left(|b_m| \|\widetilde{\theta_2}\| + |d_m| \|\widetilde{\theta_1}\| \right)^2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{a_m}{4\sqrt{\lambda_m}} \right) + \right.$
12λmambmθ22+kcmdmθ12+θ1θ2kbmcm+amdm1−bm+kcmθ1+amθ22−h12 +am4λm.

Известно, что $\mu_m \sim m\pi$. Тогда $a_m \sim e^{\frac{h_1}{a} m\pi}/2$, $b_m \sim e^{\frac{h_1}{a} m\pi}/2$, $c_m \sim e^{\frac{h_2}{a} m\pi}/2$, $d_m \sim e^{\frac{h_2}{a} m\pi}/2$. Получим

$\|\theta_1(r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]} \leq \pi \frac{a^4}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k+1} e^{-\frac{2h_1}{a} m\pi} \left(\|\widetilde{\theta_1}\| + \|\widetilde{\theta_2}\| \right)^2 \left(\frac{h_1}{2} + \right. \right.$
a8mπeh1amπ+a2mπ1k+12e−2h1amπθ22+kθ12+k+1θ1θ21−12eh1amπ+4k+ 1e−2h1amπkθ1+θ22h12+a8mπeh1amπ→0 при $m \to \infty$

Аналогичным образом получаем оценку для $\|\theta_2(r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(0,h_2)]}$. Получаем, что ряды сходятся в $L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]$, $L_2[(0,a)\times(0,h_2)]$.

§2. Единственность решения

Пусть теперь распределение температур в средах является нестационарным: $\theta_j = \theta_j(r,z,t)$. Для этих функций имеем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \chi_j \Delta\theta_j \qquad (15)$$

$$\theta_j(r,z,0) = \theta_j^0(r,z),$$

$$\theta_1(r,0,t) = \theta_2(r,0,t), \quad \frac{k_1\partial\theta_1}{\partial z}(r,0,t) = \frac{k_2\partial\theta_2}{\partial z}(r,0,t).$$

В (15) $\chi_j = \frac{k_j}{\rho_j c_j}$, где k_j — коэффициент теплопроводности; ρ_j — плотность среды; c_j — удельная теплоемкость.

Докажем, что поставленная начально-краевая задача (15) имеет единственное решение, которое является стационарным, если $\theta_j^0(r,z)$ — решение стационарной задачи. Предположим, что имеется два решения θ_j^1, θ_j^2.

Пусть $T_j = \theta_j^1 - \theta_j^2$. Подставим это выражение в (15) и получим новую начально-краевую задачу в области Ω_j:

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \chi_j \Delta T_j, \qquad (16)$$

$$T_j(r,z,0) = 0,$$

$$T_1(r,0,t) = T_2(r,0,t), \quad \frac{k_1\partial T_1}{\partial z}(r,0,t) = \frac{k_2\partial T_2}{\partial z}(r,0,t), \quad T_1(r,-h_1,t) = T_2(r,h_2,t) = 0, \quad T_j(a,z,t) = 0. \qquad (17)$$

Учитывая, что $\chi_j = \frac{k_j}{\rho_j c_j}$ уравнения в Ω_j перепишем так

$$\rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = k_j \Delta T_j.$$

Умножим обе части уравнения на T_j и проинтегрируем их по области Ω_j:

$$\rho_j c_j \int\limits_{\Omega_j} T_j \frac{\partial T_j}{\partial t} d\Omega_j = k_j \int\limits_{\Omega_j} T_j\, \Delta T_j\, d\Omega_j$$

Известно, что $\Delta T_j = div(\nabla T_j)$; $div(a\vec{b}) = a div\vec{b} + (\nabla a, \vec{b})$. Тогда

$$\frac{\rho_j c_j}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega_j} T_j^2\, d\Omega_j = k_j \int\limits_{\Omega_j} T_j\, div(\nabla T_j) d\Omega_j = k_j \int\limits_{\Omega_j} (div(T_j \nabla T_j) - |\nabla T_j|^2) d\Omega_j .$$

По формуле Остроградкого-Гаусса получим

$$\frac{\rho_j c_j}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega_j} T_j^2\, d\Omega_j = -k_j \int\limits_{\Omega_j} |\nabla T_j|^2) d\Omega_j + k_j \int\limits_{\Gamma_j} T_j \frac{\partial T_j}{\partial n} d\Gamma_j , \qquad (18)$$

где $\vec{n}$ – ориентированная внешняя нормаль к Ω_j.

Пусть Γ_j – граница в j-ой области. $\Gamma_1 = \Gamma_1^{\text{н}} + \Gamma_1^{\text{гр}} + \Gamma_1^{\text{б}}$, где $\Gamma_1^{\text{н}}$ – граница нижнего основания; $\Gamma_1^{\text{гр}}$ – граница раздела двух сред; $\Gamma_1^{\text{б}}$ – граница боковой поверхности. Аналогично определяем $\Gamma_2 = \Gamma_2^{\text{в}} + \Gamma_2^{\text{гр}} + \Gamma_2^{\text{б}}$.

$\Gamma_1^{\text{н}} = \{(r,z): z = -h_1, 0 \le r \le a\}, \vec{n}_{1\text{н}} = (0,-1);$

$\Gamma_1^{\text{гр}} = \{(r,z): z = 0, 0 \le r \le a\}, \vec{n}_{\text{гр}} = (0,1);$

$\Gamma_2^{\text{в}} = \{(r,z): z = h_2, 0 \le r \le a\}, \vec{n}_{\text{в}} = (0,-1);$

$\Gamma^{\text{б}} = \{(r,z): r = a, -h_1 \le z \le h_2\},\ \vec{n}_{\text{б}} = (1,0);$

Пусть $I_j = \int_{\Gamma_j} T_j \frac{\partial T_j}{\partial n} d\Gamma_j$, тогда

$$I_1 = -\int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} T_1(r,-h_1)\, \frac{\partial T_1}{\partial z}(r,-h_1) r d\varphi dr + \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} T_1(r,0)\, \frac{\partial T_1}{\partial z}(r,0) r d\varphi dr$$
$$+ \int\limits_{-h_1}^0 \int\limits_0^{2\pi} T_1(a,z)\, \frac{\partial T_1}{\partial z}(a,z,) a d\varphi dr \qquad (19)$$

$$I_2 = -\int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} T_2(r,0)\, \frac{\partial T_2}{\partial z}(r,0) r d\varphi dr + \int\limits_0^{h_2} \int\limits_0^{2\pi} T_2(a,z)\, \frac{\partial T_2}{\partial z}(a,z,) a d\varphi dr$$
$$+ \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} T_2(r,h_2)\, \frac{\partial T_2}{\partial z}(r,h_2) r d\varphi dr \qquad (20)$$

Пусть $k_1 I_1 = k_1(I_1^{\text{н}} + I_1^{\text{гр}} + I_1^{\text{б}})$ и $k_2 I_2 = k_2(I_2^{\text{в}} + I_2^{\text{гр}} + I_2^{\text{б}})$. Суммируя (18) и пользуясь (19) и (20), приходим к равенству

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1 c_1}{2}\int\limits_{\Omega_1} T_1^2\,d\Omega_1+\frac{\rho_2 c_2}{2}\int\limits_{\Omega_2} T_2^2\,d\Omega_2\right)$$

$$=-k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla T_1|^2)d\Omega_1-k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla T_2|^2)d\Omega_2+k_1 I_1+k_2 I_{2.}$$

В силу условий (17) получаем, что $I_1^{\text{гр}}+I_2^{\text{гр}}=0$. Остальные интегралы равны нулю, т. к. стенки и основания сосуда либо теплоизолированы, либо на них температура равна нулю. Значит

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-k_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla T_1|^2 d\Omega_1-k_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla T_2|^2 d\Omega_2,$$

откуда

$$\frac{\partial E}{\partial t}\leq 0,$$

или $E(t)\leq E(0)=0$. Поэтому $T_j=0$ в Ω_j и решение начально-краевой задачи (15) единственно, и если начальные данные есть решение стационарной задачи, то и решение является стационарным $\forall t>0$.

Список литературы

Тихонов, А. Н., & Самарский, А. А. (1972). *Уравнение математической физики.* Москва: "Наука".