О БИРАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ.

А.А. Бондаренко
Белорусский государственный университет, механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь bondarenko@bsu.by

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K, char $K \neq 2$.

Определение. *Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K, размерности $m+n$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.*

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о "сумме квадратов": найти наименьшее t при заданных m и n, чтобы выполнялось тождество $(x_1^2+\ldots+x_m^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2) = \Phi_1^2+\ldots+\Phi_t^2$, где Φ_i — билинейные формы от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ над K. Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1, 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам в изучении такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i — рациональные функции от $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. В [5] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями получено в [6].

Основная цель настоящего сообщения — решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над конечными полями.

Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над $\mathbb{F}_q$, следует из теоремы 1 статьи [5]: произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над $\mathbb{F}_q$ тогда и только тогда, когда $h(Z)$ — любая ненулевая квадратичная форма размерности $m+n$, невырожденная часть которой изотропна над $\mathbb{F}_q$.

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над конечным полем $\mathbb{F}_q$ дает

Теорема. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные квадратичные формы размерности m и n над конечным полем $\mathbb{F}_q$, char $F_1 \neq 2$, $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 2$, бирациональная композиция $h(Z)$ над $\mathbb{F}_q$ квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ всегда существует и определена однозначно с точностью до эквивалентности над $\mathbb{F}_q$:*

a) если $m = n = 1$, то $h(z_1, z_2) = c_1 c_2 z_1^2$, где $c_1 \in D_{\mathbb{F}_q}(f)$, $c_2 \in D_{\mathbb{F}_q}(g)$;

b) если $1 \leq m \leq n \leq 2$, то $h(z_1, \ldots, z_{m+n}) = z_1^2 - \alpha z_2^2$, где $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$.

Естественно возникает вопрос: какому условию должно удовлетворять поле K, чтобы всегда существовала бирациональная композиция квадратичных форм над этим полем?

Доказано необходимое условие существования бирациональной композиции любых квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K: индекс $[K^* : K^{*2}] \leq 2$. Есть все основания полагать, что это условие является и достаточным.

Литература

1. *Hurwitz A.* // Math. Ann.1923. Bd.88, N 1-2. S.1.

2. *Radon J.* // Abh. Math. Sem. Univ. Humburg. 1922. Bd. 1. N 1. S. 1.

3. *Lam K.Y.* // Quadratic and Hermition Forms (Hamilton, Ont., 1983). CMS Conf, Proc.V.4, AMS, Providence.RI. 1984. P. 173.

4. *Pfister A.* // Arch.Math. 1965. Bd. 16, N 1. S. 363.

5. *Бондаренко А.А.* // Весцi НАН Беларусi, сер. фiз.-мат. навук. 2007. № 4. C.56

6. *Бондаренко А.А.* // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 5. C.661.