Грицутенко Станислав Семенович
Омский государственный университет путей сообщения (ОмГУПС(ОмИИТ))

ДЕЛЬТА-ВЕКТОР В СВЕРТОЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В математике и физике уже долгое время используется понятие дельта-функции. Это очень удобный математический объект, позволяющий эффективно решать большой круг научных задач. К сожалению, при работе с дельта-функцией возникают и серьезные проблемы. Например, нельзя перемножать дельта-функции. Дифференцирование дельта-функций также приводит к весьма неоднозначным результатам. Иногда применение дельта-функции является причиной появления нескольких взаимоисключающих решений для одной задачи.

В данной статье дельта-функция рассматривается немного под другим углом - это ни есть раз и навсегда заданная функция. Существуют пространства векторов, среди которых возможно найти вектор, обладающий всеми свойствами дельта-функции по отношению к векторам своего пространства.

Предположим, что задано пространство Гильберта H. Пусть $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ - произвольные вектора пространства H, являющиеся действительными функциями переменной t, принадлежащей некому множеству T.

$$\{x(t), y(t), z(t)\} \subset H,$$

где $t \in \mathrm{T}$. При этом, если $x(t)$ - любой вектор пространства H, то и $x(t-\tau) \in H$, при любом $\tau \in T$.

Следовательно, на множестве H задано также и скалярное произведение двух векторов [1]:

$$(x(t), y(t)). \tag{1}$$

Определим на базе скалярного произведения (1) двух произвольных векторов пространства Гильберта понятие свертки:

Определение 1: сверткой двух произвольных векторов пространства Гильберта является третий вектор этого же пространства, получаемый из следующего соотношения:

$$z(t) = x(t) * y(t) = (x(\tau), y(t-\tau)). \tag{2}$$

Докажем для свертки свойство коммутативности.

Лемма 1. В отношении свертки двух произвольных векторов пространства Гильберта истинны следующие соотношения:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

Действительно:

$$x(t) * y(t) = (x(\tau), y(t-\tau)) = (y(t-\tau), x(\tau)).$$

С учетом подстановки $r = t - \tau$ и $\tau = t - r$ имеем:

$$(y(t-\tau), x(\tau)) = (y(r), x(t-r)) = y(t) * x(t).$$

Что и требовалось доказать.

На базе введенного понятия свертки (2) определяем дельта-вектор пространства Гильберта.

Определение 2: дельта-вектором пространства Гильберта H, на котором определена свертка, называется такой вектор $\delta(t)$, в отношении которого выполняется условие:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \ , \tag{3}$$

где $x(t)$ – любой вектор пространства H.

Теорема 1. Если в пространстве Гильберта, в котором определен ортогональный базис $\{n_i(t)\}$ и свертка, существует дельта-вектор, то этот вектор единственный и может быть вычислен по следующей формуле:

$$\delta(t) = \sum_i n_i(t) n_i(0) .$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ - произвольный вектор пространства Гильберта. Имеем по определению дельта-вектора (3):

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \left(x(\tau), \delta(t-\tau)\right) \ . \tag{4}$$

Разложим вектора $x(t)$ и $\delta(t)$ по базису $\{n_i(t)\}$:

$$\begin{gathered} x(\tau) = \sum_i a_i n_i(\tau) \\ \delta(t-\tau) = \sum_i b_i(t) n_i(\tau) \end{gathered} \quad ,$$

где a_i и b_i - коэффициенты разложения. С учетом равенства Парсеваля формула (4) преобразуется следующим образом:

$$x(t) = \left(x(\tau), \delta(t-\tau)\right) = \sum_i a_i b_i(t) .$$

Разложим по базису $x(t)$ и получим следующее:

$$\sum_i a_i n_i(t) = \sum_i a_i b_i(t) \ , \tag{5}$$

так как $x(t)$ - любой вектор, то коэффициенты $\{a_i\}$ - могут быть любыми, кроме того они независимы. Следовательно, равенство (5) может быть истинно только при условии

$$n_i(t) = b_i(t) .$$

И так, любой вектор $\delta(t-\tau)$ раскладывается единственным образом в любом базисе:

$$\delta(t-\tau) = \sum_i n_i(t) n_i(\tau) ,$$

а вектор $\delta(t)$ соответственно:

$$\delta(t) = \delta(t-0) = \sum_i n_i(t) n_i(0) .$$

Что и требовалось доказать.

Докажем некоторые свойства дельта-вектора пространства Гильберта.

Лемма 2: квадрат нормы (или энергия) дельта-вектора пространства Гильберта всегда равен $\delta(0)$.

$$\|\delta(t)\|^2 = \delta(0).$$

Имеем:

$$\|\delta(t)\|^2 = \big(\delta(t), \delta(t)\big).$$

Вводим подстановку: $f(-t) = \delta(t)$, $f(t) = \delta(-t)$:

$$\big(\delta(t), \delta(t)\big) = \big(\delta(t), f(-t)\big) = \big(\delta(t), f(0-t)\big).$$

используем свойство коммутативности свертки:

$$\big(\delta(t), f(0-t)\big) = \big(f(t), \delta(0-t)\big) = f(0) = \delta(-0) = \delta(0).$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим другое важное свойство дельта-вектора – четность (симметричность). Для доказательства этого сначала докажем такое интересное свойство свертки:

Лемма 4: для любого произвольного x и T истинно следующее соотношение:

$$\big(x(t), \delta(T-t)\big) = \big(x(t), \delta(t-T)\big).$$

Для доказательства в формулу:

$$\big(x(t), \delta(t-T)\big)$$

введем подстановку: $t - T = T - \tau$, $t = 2T - \tau$

$$\big(x(t), \delta(t-T)\big) = \big(x(2T-\tau), \delta(T-\tau)\big).$$

Исходя из определения дельта-вектора получаем:

$$\big(x(2T-\tau), \delta(T-\tau)\big) = x(2T-T) = x(T) = \big(x(t), \delta(T-t)\big).$$

Что и требовалось доказать.

Теперь можно доказать четность дельта-вектора.

Лемма 5: для любого произвольного T истинно соотношение:

$$\delta(T) = \delta(-T).$$

Как следствие Леммы 4, истинны утверждения, что

$$\begin{aligned} \big(\delta(t), \delta(t-T)\big) &= \delta(T) \\ \big(\delta(t-T), \delta(t)\big) &= \delta(-T) \end{aligned}.$$

Но из определения скалярного произведения:

$$\big(\delta(t), \delta(t-T)\big) = \big(\delta(t-T), \delta(t)\big).$$

Следовательно:

$$\delta(T) = \delta(-T).$$

Что и требовалось доказать.

Введем в рассматриваемое пространство понятие единичного вектора.

Определение 3: Единичным вектором e будем считать такой вектор, для которого справедливо соотношение:

$$x = ex.$$

Очевидно, что в рассматриваемом пространстве действительных функций, единичный вектор является действительной функцией $e(t) = 1$. Для дальнейшего описания свойств дельта-вектора введем понятие площади вектора.

Определение 4: площадью вектора x пространства Гильберта, если в нем определен единичный вектор e является действительное число S, определяемое следующим соотношением:

$$S = (e, x). \tag{6}$$

Докажем следующее свойство дельта-векотра.

Лемма 6. Площадь дельта-вектора всегда равна 1.

Найдем площадь дельта-вектора в соответствии с формулой (6):

$$S = (e(t), \delta(t)) = (e(t), \delta(0-t)) = e(0) = 1.$$

Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим интерполяционные возможности дельта-вектора. Для этого предположим, что у нас имеется набор из N «смещенных» по оси t функций вида $\delta(t-nT)$. Предположим, что функции $\delta(t-nT)$ образуют полный ортогональный базис. В этом случае, по этим функциям возможно разложить любой вектор пространства H.

Теорема 2. Если в пространстве Гильберта возможно задать полный ортогональный базис размерности N состоящий из функций вида $\delta(t-nT)$, то любой вектор $x(t)$ этого пространства может быть однозначно восстановлен по своим значениям в точках $t = nT$.

Доказательство.

Так как, функции $\delta(t-nT)$ образуют полный ортогональный базис, то вектор $x(t)$ возможно разложить по этому базису:

$$x(t) = \sum_{n=M}^{n=M+N} x_n \delta(t-nT), \tag{7}$$

где N – размерность базиса рассматриваемого пространства; $[M, M+N]$ – интервал значений n. Остается только найти коэффициенты разложения по данному базису:

$$x_n = \frac{1}{\|\delta(t)\|^2}\big(x(t), \delta(t-nT)\big) = \frac{1}{\delta(0)}\big(x(t), \delta(nT-t)\big) = \frac{1}{\delta(0)} x(nT).$$

Таким образом, формула (7) принимает вид:

$$x(t) = \frac{1}{\delta(0)} \sum_{n=M}^{n=M+N} x(nT)\delta(t-nT). \tag{8}$$

Это означает, что имея только отсчеты вектора $x(t)$ в точках $t = nT$ возможно полностью восстановить весь вектор. Что и требовалось доказать.

Приведем пример пространства, в котором существует дельта-вектор. Таким пространством является множество всех функций со спектром, ограниченным отрезком $[-\Omega, \Omega]$. Скалярным произведением векторов $x(t)$ и $y(t)$ этого пространства выберем следующее известное соотношение [2]:

$$\big(x(t), y(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \ .$$

Исходя из формулы (4) получим, что для дельта-вектора $\delta(t)$ данного пространства справедливо соотношение:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \,,$$

где $x(t)$ - любой вектор рассматриваемого пространства. Данное соотношение – это классическая свертка двух функций $x(t)$ и $\delta(t)$. Сразу оговоримся, что классическая дельта-функция Дирака в данном случае дельта-вектором выступать не может, так как ее спектр не ограничен интервалом $[-\Omega, \Omega]$ и, следовательно, она не является вектором нашего пространства. Необходимо искать дельта вектор среди функций с ограниченным спектром.

Как известно из теории [2], классическая свертка во временной области соответствует перемножению спектров функций в спектральной области. Подберем такую функцию $\delta(t)$, спектр $\Lambda(\omega)$ которой в отношении спектра $X(\omega)$ любой функции рассматриваемого пространства обладает свойством:

$$X(\omega) = \Lambda(\omega)X(\omega) \ .$$

Очевидно, что

$$\Lambda(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \subset [\text{-}\Omega, \Omega] \\ 0, \omega \not\subset [\text{-}\Omega, \Omega] \end{cases} .$$

А таким спектром обладает функция:

$$\delta(t) = \frac{\sin \Omega t}{t} \ . \qquad (9)$$

Известно, что смещенные по оси времени на интервалы $nT = \frac{2\pi}{\Omega} n$ функции вида (9) образуют полный ортогональный базис. Учитывая, что $\delta(0) = \Omega$, а $N \to \infty$, формула (8) приобретает вид широко известной интерполяционной формулы Котельникова [3]:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \Omega(t - nT)}{\Omega(t - nT)} \,,$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$.

В заключении приведем основные результаты, полученные в данной работе.

1. Дельта-функция Дирака не является уникальным математическим объектом. Существуют пространства Гильберта, в которых имеется вектор, обладающий свойствами дельта-функции в отношении всех векторов своего пространства.

2. Площадь дельта-вектора равна 1.

3. Квадрат нормы (энергия) дельта-вектора равна значению этого вектора в точке 0.

4. Если в пространстве Гильберта, в котором определен ортогональный базис и свертка, существует дельта-вектор, то этот вектор единственный и может быть стандартно вычислен из любого базиса этого пространства.

5. Дельта-вектор обладает свойством симметрии.

6. В пространстве функций, ограниченных по Котельникову существует дельта-вектор, определяемый формулой:

$$\delta(t) = \frac{\sin \Omega t}{t}.$$

Библиографический список

1. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру: М.:Мир, 1979.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов.М.: Высш. школа, 1981.
3. Романюк Ю. А. Основы цифровой обработки сигналов. М.:МФТИ, 2005.