ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТЫХ n-КРАТНЫХ АЛГЕБР

Н.А. Корешков, г. Казань

Ассоциативной n-кратной алгеброй будем называть векторное пространство A и n заданных на нем билинейных отображений $s_i : A \times A \longrightarrow A$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условию:

$$(as_i b)s_j c = as_i(bs_j c),\ a, b, c \in A,\ i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть A — подпространство в пространстве матриц $M_m(P)$ над полем P. $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — некоторое фиксированное множество матриц из $M_m(P)$. Если для любых двух элементов $a, b \in A$ произведение $as_i b \in A$, $i = 1, \dots, n$, то A удовлетворяет определению ассоциативной n-кратной алгебры, которую будем называть сэндвичевой алгеброй. Например, если $A = \langle E_{11}, E_{21}, \dots, E_{m1}\rangle$, $S = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}\}$, то $A = A(S)$ — сэндвичева алгебра. Обозначим ее C_n. Легко проверить, что C_n — n-кратная простая алгебра и, даже, простой левый C_n-модуль относительно левого регулярного представления.

Если $\widetilde{s} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i s_i$, $\widehat{s} = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i s_i$, $a_i,\ b_i \in P$, то $(a\widetilde{s}b)\widehat{s}c = a\widetilde{s}(b\widehat{s}c)$, $a, b, c \in A$. Поэтому можно рассмотреть P-модуль $\langle S\rangle_P$, порожденный отображениями $\{s_i,\ i = 1, \dots, n\}$. Имеет смысл считать, что $n = dim_P\langle S\rangle_P$. Если $\widetilde{S} = \{\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_n\} \subset \langle S\rangle_P$, т. е. $\widetilde{s}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji}s_j$, $b_{ji} \in P$, то будем говорить, что системы S и $\widetilde{S}$ эквивалентны, если матрица $B = (b_{ji},\ j, i = 1, \dots, n)$ — обратима в P. Соответствующие алгебры $A(S)$ и $A(\widetilde{S})$ также назовем эквивалентными.

Теорема. *Пусть $A(S)$, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — n-кратная алгебра над алгебраически замкнутым полем P, $dim_P A(S) = m$, причем $n = dim_P\langle S\rangle_P$. Если $A(S)$ — простой левый $A(S)$-модуль, то $n = m$ и $A(S)$ эквивалентна сэндвичевой алгебре C_n.*